A la découverte de l'infini

Audrey Fovelle (Universidad de Granada)

MATh.en.JEANS, Calais

6 avril 2024

1. Comment additionner une infinité de nombres ? Le paradoxe de Zénon

2. Un infini peut en cacher un autre
   - Comment comparer deux ensembles ?
   - L'hôtel (infini !) de Hilbert

3. Les frères Lebrun et l'infini : le paradoxe des balles de ping-pong

Un lièvre fait la course avec une tortue.
Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et
la tortue à la vitesse de 1 m/s...

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Puis, le lièvre parcourt les 10m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m...

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Puis, le lièvre parcourt les 10m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m... et ainsi de suite...

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Puis, le lièvre parcourt les 10m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m... et ainsi de suite...

Conclusion :

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Puis, le lièvre parcourt les 10m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m... et ainsi de suite...

Conclusion : le lièvre ne rattrape jamais la tortue !

Un lièvre fait la course avec une tortue. Le lièvre court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le lièvre, sûr de gagner, laisse 100m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que celui-ci parcourt ses 100m de retard, la tortue s'éloigne de 10m.

Puis, le lièvre parcourt les 10m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m... et ainsi de suite...

Conclusion : le lièvre ne rattrape jamais la tortue ! Perturbant !

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)...

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !

$10t = 100 + t$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !
$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9}$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !

$$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9} = 11,1111\ldots$$

Le lièvre rattrape bien la tortue :

Notons $f(t)$ et $g(t)$ les positions respectives du lièvre et de la tortue à l'instant t.
On convient que la ligne de départ correspond à la position 0. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 100$.
Par hypothèse, on a alors :

$$f(t) = 10t \quad \text{et} \quad g(t) = 100 + t.$$

Résolvons f (t) = g(t)... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \dfrac{100}{9} = 11,1111\ldots.$

Conclusion : le lièvre rattrape la tortue ... Ouf !

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \dfrac{1}{10}\right) = 11$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11{,}1$.

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k}$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \dfrac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \dfrac{1}{10} = 10\left(1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} \quad = 10\frac{1 - \dfrac{1}{10^n}}{1 - \dfrac{1}{10}}$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} \quad = 10\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$
$$= \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Reprenons pas à pas le premier raisonnement :
Temps écoulé (en secondes) après :

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = 10\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} = 10\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

La suite $(t_n)_n$ tend vers $\frac{100}{9}$!

Conclusion : Il n'y a pas de contradiction !

Conclusion : Il n'y a pas de contradiction !
Zénon avait découpé un temps fini en une infinité de morceaux :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n} + \cdots = \frac{100}{9}.$$

On a effectué une infinité d'additions, ce qui se note :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{1-n} = \frac{100}{9}.$$

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.
. . . On les compte !

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.
. . . On les compte !

Et si on ne sait pas compter ? Ou qu'il y en a trop ?

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.
. . . On les compte !

Et si on ne sait pas compter ? Ou qu'il y en a trop ?
Par exemple un ensemble de médailles et un ensemble d'athlètes.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.
. . . On les compte !

Et si on ne sait pas compter ? Ou qu'il y en a trop ?
Par exemple un ensemble de médailles et un ensemble d'athlètes.
On essaye "d'apparier" les athlètes et les médailles.

Comment savoir si deux ensembles finis ont la même taille ?
Par exemple un ensemble de pommes et un ensemble de poires.
. . . On les compte !

Et si on ne sait pas compter ? Ou qu'il y en a trop ?
Par exemple un ensemble de médailles et un ensemble d'athlètes.
On essaye "d'apparier" les athlètes et les médailles.

Les mathématiciens disent qu'on essaye de construire une bijection entre les ensembles.

Définition

Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est une surjection si pour tout élément b de B, il existe au moins un élément a dans A tel que $f(a) = b$.

Définition

Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est une injection si pour tout élément b de B, il existe au plus un élément a dans A tel que $f(a) = b$.

Définition

Une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est une bijection si c'est une injection et une surjection, c'est-à-dire que pour tout élément b de B, il existe un unique élément a dans A tel que $f(a) = b$.

Comment comparer deux ensembles infinis ?

Comment comparer deux ensembles infinis ?
On ne peut pas compter les éléments d'un ensemble infini !

Comment comparer deux ensembles infinis ?
On ne peut pas compter les éléments d'un ensemble infini !
On dira que deux ensembles infinis sont "de même taille" si on peut les mettre en bijection, c'est-à-dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe comment on le fait.

Comment comparer deux ensembles infinis ?
On ne peut pas compter les éléments d'un ensemble infini !
On dira que deux ensembles infinis sont "de même taille" si on peut les mettre en bijection, c'est-à-dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe comment on le fait.
Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d'illustrer...

Comment comparer deux ensembles infinis ?
On ne peut pas compter les éléments d'un ensemble infini !
On dira que deux ensembles infinis sont "de même taille" si on peut les mettre en bijection, c'est-à-dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe comment on le fait.
Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d'illustrer... mais avant

Comment comparer deux ensembles infinis ?
On ne peut pas compter les éléments d'un ensemble infini !
On dira que deux ensembles infinis sont "de même taille" si on peut les mettre en bijection, c'est-à-dire si on peut apparier leurs éléments... peu importe comment on le fait.
Cette définition réserve quelques surprises que nous allons essayer d'illustrer... mais avant

Connaissez-vous des ensembles infinis ?

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****,*

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

$\mathbb{N}^*$ est-il dénombrable ?

$\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

$\mathbb{N}^*$ est-il dénombrable ?

$\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?

Sauriez-vous me dire qui l'a découvert et quand ?

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

$\mathbb{N}^*$ est-il dénombrable ?

$\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?

Sauriez-vous me dire qui l'a découvert et quand ? Galilée, vers 1600

Définition

Un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit ***dénombrable****, c'est-à-dire qu'on peut énumérer ses éléments.*

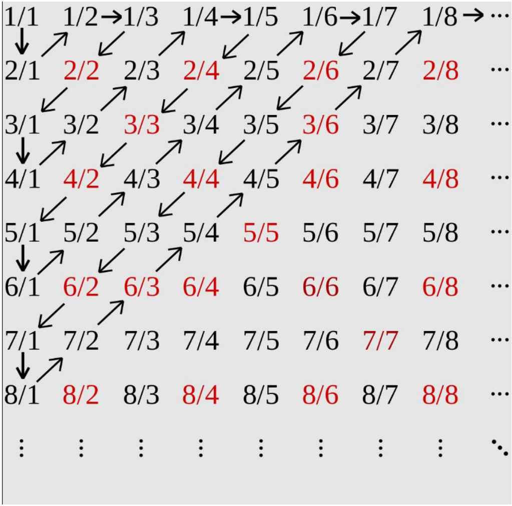
$\mathbb{N}^*$ est-il dénombrable ?

$\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?

Sauriez-vous me dire qui l'a découvert et quand ? Galilée, vers 1600

$\mathbb{Q}$ est-il dénombrable ?

$\mathbb{Q}^+$ est dénombrable



Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ?

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ? Cantor, en 1873

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ? Cantor, en 1873

Une particularité de $\mathbb{Q}$ est la suivante : dès que vous prenez un intervalle (non vide bien sûr !), vous allez y trouver un rationnel.

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ? Cantor, en 1873

Une particularité de $\mathbb{Q}$ est la suivante : dès que vous prenez un intervalle (non vide bien sûr !), vous allez y trouver un rationnel.

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ? Cantor, en 1873

Une particularité de $\mathbb{Q}$ est la suivante : dès que vous prenez un intervalle (non vide bien sûr !), vous allez y trouver un rationnel.

On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Alors à votre avis, $\mathbb{R}$... dénombrable ou pas dénombrable ?

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl} 0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,0000000000\ldots \\ 1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1111111111\ldots \\ 2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,1010101010\ldots \\ 3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,0101010101\ldots \\ 4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,1101011010\ldots \\ 5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,0011011011\ldots \\ \vdots & & \vdots \ = 0,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\ \ddots \end{array}$$

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$
\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,\textcolor{red}{0}000000000\ldots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1\textcolor{red}{1}11111111\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,10\textcolor{red}{1}0101010\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,010\textcolor{red}{1}010101\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,2203\textcolor{red}{5}22035\ldots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,00220\textcolor{red}{2}1011\ldots \\
\vdots & & \vdots \;= 0,\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\ddots
\end{array}
$$

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,\textcolor{red}{0}000000000\ldots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1\textcolor{red}{1}11111111\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,10\textcolor{red}{1}0101010\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,010\textcolor{red}{1}010101\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,2203\textcolor{red}{5}22035\ldots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,00220\textcolor{red}{2}1011\ldots \\
\vdots & & \vdots \quad = 0,\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\ddots
\end{array}$$

Posons ensuite

$$r = 0,122263\ldots$$

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,0000000000\dots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1111111111\dots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,1010101010\dots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,0101010101\dots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,2203522035\dots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,0022021011\dots \\
\vdots & & \vdots \;\; = 0,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots \;\ddots
\end{array}$$

Posons ensuite

$$r = 0,122263\dots$$

Est-il dans la liste ?

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,0000000000\dots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1111111111\dots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,1010101010\dots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,0101010101\dots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,1101011010\dots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,0011011011\dots \\
\vdots & & \vdots \;\; = 0,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots \;\ddots
\end{array}$$

Posons ensuite

$$r = 0,122263\dots$$

Est-il dans la liste ? Non !

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,0000000000\dots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1111111111\dots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,1010101010\dots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,0101010101\dots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,1101011010\dots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,0011011011\dots \\
\vdots & & \vdots \ = 0,\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots \ \ddots
\end{array}$$

Posons ensuite

$$r = 0,122263\dots$$

Est-il dans la liste ? Non !

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ?

$[0,1]$ est "plus gros" que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longleftrightarrow & r_0 = 0,0000000000\dots \\
1 & \longleftrightarrow & r_1 = 0,1111111111\dots \\
2 & \longleftrightarrow & r_2 = 0,1010101010\dots \\
3 & \longleftrightarrow & r_3 = 0,0101010101\dots \\
4 & \longleftrightarrow & r_4 = 0,1101011010\dots \\
5 & \longleftrightarrow & r_5 = 0,0011011011\dots \\
\vdots & & \vdots \;\; = 0,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots \;\ddots
\end{array}$$

Posons ensuite

$$r = 0,122263\dots$$

Est-il dans la liste ? Non !

Sauriez-vous me dire qui l'a démontré et quand ? Cantor, en 1874

L'HOTEL (INFINI !) DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

L'HOTEL (INFINI !) DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

En particulier : *une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.*

Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

L'HOTEL (INFINI !) DE HILBERT

L'hôtel de Hilbert, ou hôtel infini de Hilbert, est une image attribuée au mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) qui illustre plusieurs propriétés surprenantes des ensembles infinis.

En particulier : *une partie d'un ensemble, différente du tout, peut avoir "la même taille" que le tout.*

Autrement dit : elle a autant d'éléments, même s'il en manque...

Imaginons l' hôtel (fictif !) suivant, tenu par M. Macron afin de pouvoir accueillir tous les touristes pendant les jeux olympiques : cet hôtel possède une infinité de chambres (une par étage) numérotées par les entiers naturels (par $\mathbb{N}^*$ en fait) : 1,2,3,4,5,6,7,....

M. Macron est satisfait. Tous les soirs, l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

M. Macron est satisfait. Tous les soirs, l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir, de nouveaux clients arrivent pour voir leur athlète préféré le lendemain. Il leur faut une chambre. La situation semble sans espoir !

M. Macron est satisfait. Tous les soirs, l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir, de nouveaux clients arrivent pour voir leur athlète préféré le lendemain. Il leur faut une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, M. Macron essaye de leur trouver une chambre. Bien entendu, à la fin de l'opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

M. Macron est satisfait. Tous les soirs, l'hôtel est plein : chaque chambre est occupée par exactement un client.

Chaque soir, de nouveaux clients arrivent pour voir leur athlète préféré le lendemain. Il leur faut une chambre. La situation semble sans espoir !

Malgré tout, M. Macron essaye de leur trouver une chambre. Bien entendu, à la fin de l'opération, chaque ancien client doit encore avoir une chambre et être seul dans sa chambre.

Dans chacun des cas suivants, pouvez vous dire si M. Macron va s'en sortir et si oui... comment ?

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...
4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...
4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses).

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...
4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...
4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.
Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un t-shirt sur lequel figure deux numéros :

1) Le premier soir : un nouveau client se présente.
2) Le deuxième soir : 2024 nouveaux clients se présentent.
3) Le troisième soir : un bus (infini !) de nouveaux clients se gare devant l'hôtel. De ce bus sort une infinité (dénombrable) de clients, chacun portant un t-shirt numéroté : 1,2,3,4,5,6,7,8...
4) Le quatrième soir : une infinité (dénombrable) de bus se garent devant l'hôtel (en fait le parking de l'hôtel infini est un parking infini, c'est la moindre des choses). Les bus sont numérotés 1,2,3,4,5,6,7,8... De chaque bus sort une infinité (dénombrable) de clients.
Pour être sûrs de ne pas perdre leurs clients, les organisateurs leur font porter un t-shirt sur lequel figure deux numéros : le premier est celui de leur bus et le second est celui de leur place dans ce bus.

Un peu plus de théorie des ensembles

Question

Est-ce que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, est dénombrable ?

1. Comment additionner une infinité de nombres ? Le paradoxe de Zénon
2. Un infini peut en cacher un autre
   - Comment comparer deux ensembles ?
   - L'hôtel (infini !) de Hilbert
3. Les frères Lebrun et l'infini : le paradoxe des balles de ping-pong

Les frères Lebrun et l'infini : le paradoxe des balles de ping-pong

Félix Lebrun dispose d'une infinité de balles de ping-pong, numérotées, et d'un vase de taille infinie.

L'expérience est composée d'une infinité d'étapes. A chaque étape, Félix met 2 balles dans le vase puis en retire une qu'il donne à son frère, Alexis.

Les frères Lebrun et l'infini : le paradoxe des balles de ping-pong

Félix Lebrun dispose d'une infinité de balles de ping-pong, numérotées, et d'un vase de taille infinie.

L'expérience est composée d'une infinité d'étapes. A chaque étape, Félix met 2 balles dans le vase puis en retire une qu'il donne à son frère, Alexis.

Combien reste-t-il de balles à la fin ?

Une première réponse

Facile ! Il en reste une infinité !

Une première réponse

Facile ! Il en reste une infinité !
A chaque étape, Félix a une balle de plus dans son vase donc à la fin, il en a une infinité !

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Une deuxième réponse

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 1 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 2 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 3 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape n, Félix ajoute les balles $2n - 1$ et $2n$ puis donne la balle n à son frère.

Une deuxième réponse

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 1 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 2 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 3 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape n, Félix ajoute les balles $2n-1$ et $2n$ puis donne la balle n à son frère.
S'il reste une infinité de balles dans le vase de Félix, vous devriez pouvoir me donner le numéro de l'une d'entre elles, non ?

Une troisième réponse

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 2 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 4 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 6 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape n, Félix ajoute les balles $2n-1$ et $2n$ puis donne la balle $2n$ à son frère.

Une troisième réponse

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 2 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 4 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 6 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape n, Félix ajoute les balles $2n-1$ et $2n$ puis donne la balle $2n$ à son frère.
Mais alors finalement, il lui reste toutes les balles impaires, ça fait donc bien une infinité de balles !

Une quatrième réponse

Il en reste 2 !

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 2 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 4 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 5 à Alexis. A la quatrième étape, Félix ajoute les balles 7 et 8 puis donne la balle 6 à son frère. A la cinquième étape, Félix ajoute les balles 9 et 10 puis donne la balle 7 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape $n \geq 6$, Félix ajoute les balles $2n - 1$ et $2n$ puis donne la balle $n + 2$ à son frère.

Une quatrième réponse

Il en reste 2 !

A la première étape, Félix ajoute les balles 1 et 2 dans son vase puis donne la balle 2 à Alexis. A la deuxième étape, Félix ajoute les balles 3 et 4 puis donne la balle 4 à son frère. A la troisième étape, Félix ajoute les balles 5 et 6 puis donne la balle 5 à Alexis. A la quatrième étape, Félix ajoute les balles 7 et 8 puis donne la balle 6 à son frère. A la cinquième étape, Félix ajoute les balles 9 et 10 puis donne la balle 7 à Alexis.

$$\vdots$$

A l'étape $n \geq 6$, Félix ajoute les balles $2n - 1$ et $2n$ puis donne la balle $n + 2$ à son frère.

Il ne reste donc que les balles 1 et 3 dans le vase !

Pas étonnant que des mathématiciens soient devenus fous !

Formalisons un peu les raisonnements

Notons $f(n)$ le numéro de la boule que Félix donne à Alexis à l'étape n.

Formalisons un peu les raisonnements

Notons $f(n)$ le numéro de la boule que Félix donne à Alexis à l'étape n.

Dans le raisonnement de la deuxième réponse, $f(n) = n$.

Formalisons un peu les raisonnements

Notons $f(n)$ le numéro de la boule que Félix donne à Alexis à l'étape n.

Dans le raisonnement de la deuxième réponse, $f(n) = n$.

Dans le raisonnement de la troisième réponse, $f(n) = 2n$.

Formalisons un peu les raisonnements

Notons $f(n)$ le numéro de la boule que Félix donne à Alexis à l'étape n.

Dans le raisonnement de la deuxième réponse, $f(n) = n$.

Dans le raisonnement de la troisième réponse, $f(n) = 2n$.

Dans le raisonnement de la quatrième réponse, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(n) = n + 2$ si $n \geq 3$.

Formalisons un peu les raisonnements

Notons $f(n)$ le numéro de la boule que Félix donne à Alexis à l'étape n.

Dans le raisonnement de la deuxième réponse, $f(n) = n$.

Dans le raisonnement de la troisième réponse, $f(n) = 2n$.

Dans le raisonnement de la quatrième réponse, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ et $f(n) = n + 2$ si $n \geq 3$.

On en revient à l'hôtel de Hilbert !