Université de Franche-Comté

Mémoire de Licence 3

Espaces de Lebesgue L^p et produit de convolution

FRIEDEN Karine
FOVELLE Audrey
DUQUET Charles

Tuteur : M. BOUSSAID Nabile

Année 2017

Table des matières

Nous avons vu certaines propriétés des espaces L^1 dans le cours d'intégration. Le but de ce projet est de les approfondir et de les généraliser aux espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, qui sont de grandes classes de fonctions : ce sont des exemples importants de Banach, voire de Hilbert. Pour cela, nous nous intéresserons aux premières propriétés des espaces $\mathscr{L}^p$. Puis nous verrons la nécessité d'un passage au quotient afin de construire les espaces L^p et la complétude de ces espaces. Ensuite nous considèrerons les cas $p = 2$ et $p = +\infty$, qui sont deux cas particuliers. Par exemple, L^2 est un espace de Hilbert. Nous poursuivrons avec les sous-espaces denses classiques des espaces $L^p, 1 \leqslant p < +\infty$, où le théorème de Lusin jouera un rôle central. Nous continuerons avec l'étude des duaux des espaces $L^p, p < +\infty$. Enfin, nous nous intéresserons au produit de convolution qui permet la régularisation de fonctions. Nous définirons ainsi les suites régularisantes qui permettent une approximation de l'unité et de montrer la densité de l'ensemble des fonctions de classes C^∞ à support compact dans l'espace L^p.
De plus, dans le cours d'espaces métriques, nous avons étudié les espaces l^p de suites de puissances p-ième sommable et nous allons voir que les espaces $\mathscr{L}^p$ généralisent certaines de leurs propriétés.

1 Introduction et complétude des espaces L^p, $1 \leqslant p < +\infty$

Dans la suite, nous aurons besoin de certains résultats de complétude, de théorie de la mesure et de la notion de support d'une fonction que nous allons énoncer dans cette partie.

1.1 Préliminaires

Théorème 1. *Soit X un ensemble. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$.*
$(\mathscr{B}(X,\mathbb{C}), \|.\|_{sup})$ est un espace de Banach, avec pour tout $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{C})$,
$\|f\|_{sup} = sup\{|f(x)|, x \in X\}$.

Démonstration. Montrons que $(\mathscr{B}(X,\mathbb{C}), \|.\|_{sup})$ est un espace vectoriel normé.
$\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$ est bien un espace vectoriel. Montrons donc que $\|.\|_{sup}$ est une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$.

— On a bien $\|.\|_{sup} : \mathscr{B}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$.
— Soit $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{C})$ telle que $\|f\|_{sup} = 0$. Alors pour tout $x \in X$, $f(x) = 0$ donc $f \equiv 0$ d'où $\|.\|_{sup}$ est bien définie.
— Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathscr{B}(X,\mathbb{C})$. On a :

$$\|\lambda f\|_{sup} = sup\{|\lambda f(x)|, x \in X\} = sup\{|\lambda||f(x)|, x \in X\} = |\lambda| sup\{|f(x)|, x \in X\} = |\lambda|\|f\|_{sup}$$

d'où $\|.\|_{sup}$ est bien homogène.
— Soit $(f, g) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{C})^2$. On a :

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{sup} &= sup\{|f(x)+g(x)|, x \in X\} \\ &\leqslant sup\{|f(x)|+|g(x)|, x \in X\} \\ &\leqslant sup\{|f(x)|, x \in X\} + sup\{|g(x)|, x \in X\} = \|f\|_{sup} + \|g\|_{sup}\end{aligned}$$

d'où $\|.\|_{sup}$ vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Finalement, $(\mathscr{B}(X,\mathbb{C}), \|.\|_{sup})$ est un espace vectoriel normé.
Soit $(f_n) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}; \forall n, p \geqslant m, \|f_n - f_p\|_{sup} \leqslant \varepsilon$$

En particulier, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Or $\mathbb{C}$ est complet donc pour tout $x \in X$, il existe $f(x) \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. On a alors :

$$\forall \varepsilon, \exists m \in \mathbb{N}; \forall n \geqslant m, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ \ (*)$$

On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant m$, pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.
On a alors :

$$\forall x \in X, |f(x)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x)| \leqslant 1 + \|f_m\|_{sup}$$

D'où $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{C})$. De plus, d'après $(*)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_{sup} = 0$.
Donc (f_n) converge dans $\mathscr{B}(X,\mathbb{C})$.
Finalement, $(\mathscr{B}(X,\mathbb{C}), \|.\|_{sup})$ est complet. C'est donc bien un espace de Banach. $\square$

Définition 1. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*
- *Une partie A de X est dite μ-négligeable ssi il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*
- *Une propriété $\mathcal{P}$ concernant des éléments de X est dite vraie μ-presque partout (μpp) ssi $\{x \in X; x$ ne vérifie pas $\mathcal{P}\}$ est un ensemble μ-négligeable.*

Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathscr{O}(X)$ l'ensemble des ouverts de X. Toutes les mesures considérées sont définies sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{O}(X))$ relative à la topologie définie par d.

Définition 2. *(a) Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est dite extérieurement régulière ssi*

$$\forall A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = inf\{\mu(O), O \ \ ouvert, A \subset O\}$$

(b) Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est dite intérieurement régulière ssi

$$\forall A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = sup\{\mu(K), K \ \ compact, K \subset A\}$$

(c) Une mesure μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est dite régulière ssi elle est à la fois extérieurement et intérieurement régulière

Lemme 1. *Soit A une partie de X. La fonction $d(., A)$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Montrons que $d(., A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e* que pour tout $(x, y) \in X^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$.
Soit $(x, y) \in X^2$
Par symétrie, il suffit de montrer que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$
$\forall a \in A, d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$
donc $\forall a \in A, d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$
Or, $d(y, A) = inf\{d(y, a), a \in A\}$ d'où $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, A)$
Finalement, on a bien que la fonction $d(., A)$ est 1-lipschitzienne. $\square$

Proposition 1. *Soit μ une mesure positive finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$.*
Pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \backslash F) \leqslant \varepsilon$ $(*)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{B}(X); A \text{ vérifie}(*)\}$ est une tribu et que $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{T}$.
Montrons que $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{T}$.
Soit $A \in \mathscr{O}(X)$. Soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $\delta > 0$, on pose $F_\delta = \{x \in X; d(x, {}^cA) \geqslant \delta\}$.
La fonction $x \to d(x, {}^cA)$ est continue (car lipschitzienne d'après le lemme 1) donc F_δ est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $[\delta, +\infty]$ par une fonction continue.
Or $\bigcup\limits_{p \geqslant 1} F_{\frac{1}{p}} = \{x \in X; d(x, {}^cA) > 0\} = {}^c(\overline{{}^cA}) = {}^c({}^cA) = A$ car ${}^cA$ est fermé. Or $(F_{\frac{1}{p}})_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'où

$$\lim_{p \to +\infty} \mu(F_{\frac{1}{p}}) = \mu\left(\bigcup_{p \geqslant 1} F_{\frac{1}{p}}\right) = \mu(A)$$

Or μ est finie donc $\mu(A) < +\infty$ d'où $\lim\limits_{p \to +\infty} \mu(A \backslash F_{\frac{1}{p}}) = 0$.
D'où il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(A \backslash F_{\frac{1}{p}}) \leqslant \varepsilon$.
On a alors : $F_{\frac{1}{p}} \subset A \subset A$ et $\mu(A \backslash F_{\frac{1}{p}}) \leqslant \varepsilon$ avec $F_{\frac{1}{p}}$ fermé et A ouvert. Donc $A \in \mathscr{T}$.
Finalement $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{T}$.

Montrons que $\mathscr{T}$ est une tribu sur X.
- $X \in \mathscr{B}(X)$ et $\mu(X \backslash X) = 0$ avec X ouvert et fermé donc $X \in \mathscr{T}$
- Soit $A \in \mathscr{T}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert, F fermé tel que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \backslash F) \leqslant \varepsilon$. On a : ${}^cO \subset {}^cA \subset {}^cF$, ${}^cO$ fermé, ${}^cF$ ouvert et comme $O \backslash F = {}^cF \backslash {}^cO$, $\mu({}^cF \backslash {}^cO) \leqslant \varepsilon$, ${}^cA \in \mathscr{T}$
- Soit $(A_n)_n \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert, F_n fermé tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \backslash F_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}$; On a : $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} O_n$ et :

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \backslash \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \cap {}^c\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) \\
&= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^cF_n\right) \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(O_n \cap \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} {}^cF_m\right)\right) \\
&\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \cap {}^cF_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (O_n \backslash F_n)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n\right) \backslash \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n \backslash F_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(O_n \backslash F_n) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right)$ et $\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right)_n$ est croissante, on a $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right)$ d'où il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) - \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n_\varepsilon} F_k\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$, $F = \bigcup_{k=0}^{n_\varepsilon} F_k$. O est ouvert, F est fermé et $F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset O$. De plus, comme $\mu(O) < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(O\backslash F) &= \mu(O) - \mu(F) \\
&= \left(\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)\right) + \left(\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) - \mu(F)\right) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$

Donc $\mathscr{T}$ est bien une tribu sur X.
Finalement, comme $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{B}(X); A \text{ vérifie}(*)\}$ est une tribu et que $\mathscr{O}(X) \subset \mathscr{T}$, $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{O}(X)) \subset \sigma(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.
D'où pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O\backslash F) \leqslant \varepsilon$ $(*)$. □

Définition 3. *Une mesure μ sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ est dite σ-finie ssi il existe une suite croissante $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < +\infty$.*
Par extension, l'espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dit σ-fini.

Théorème 2. *(a)Si μ est une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$, alors*

$$\forall A \in \mathscr{B}(X),\ \mu(A) = sup\{\mu(F), F\ \ fermé, F \subset A\}$$

(b) Si de plus, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{E}_n$ (on reprend les notations de la définition) alors la mesure μ est extérieurement régulière.
(c) Enfin, si l'on peut choisir les E_n compacts, alors la mesure μ est intérieurement régulière

Démonstration. (a) Soit $A \in \mathscr{B}(X)$.
Cas 1 : $\mu(A) < +\infty$
Soit $\varepsilon > 0$. On a : $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap E_n)$ et $(A \cap E_n)_n$ est croissante d'où il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A) - \mu(A \cap E_{n_\varepsilon}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ *i.e* , comme $\mu(A)$ est finie par hypothèse, $\mu(A\backslash E_{n_\varepsilon}) = \mu(A\backslash(A \cap E_{n_\varepsilon})) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
On pose alors :

$$\mu' : \left\{\begin{array}{lll} \mathscr{B}(X) & \to & \overline{\mathbb{R}^+} \\ B & \mapsto & \mu(B \cap E_{n_\varepsilon}) \end{array}\right.$$

μ' est une mesure finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$ car $\mu'(X) = \mu'(E_{n_\varepsilon}) < +\infty$ donc, d'après la proposition précédente, il existe F fermé tel que $F \subset A$ et $\mu'(A\backslash F) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$\mu(A\backslash F) = \mu((A\backslash F) \cap E_{n_\varepsilon}) + \mu((A\backslash F) \cap {}^c E_{n_\varepsilon}) \leqslant \mu'(A\backslash F) + \mu(A\backslash E_{n_\varepsilon}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On note alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé tel que $F \subset A$ et $\mu(A)-\mu(F) = \mu(A\backslash F) \leqslant \varepsilon$.
D'où $\mu(A) = sup\{\mu(F), F \ \ fermé, F \subset A\}$

Cas 2 : $\mu(A) = +\infty$
On a encore $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap E_n)$ et $(A \cap E_n)_n$ croissante donc, d'après le cas 1, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A \cap E_n) \leqslant \mu(E_n) < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A \cap E_n) &= sup\{\mu(F), F \ \ fermé, F \subset A \cap E_n\} \\ &\leqslant sup\{\mu(F), F \ \ fermé, F \subset A\}\end{aligned}$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{F \subset A \cap E_n\} \subset \{F \subset A\}$.
D'où $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A \cap E_n) \leqslant sup\{\mu(F), F \ \ fermé, F \subset A\}$.
De plus, pour tout $F \subset A$ fermé, $\mu(F) \leqslant \mu(A)$ d'où :
$\mu(A) = sup\{\mu(F), F \ \ fermé, F \subset A\}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mu_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathscr{B}(X) & \to & \overline{\mathbb{R}^+} \\ B & \mapsto & \mu(B \cap E_n) \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_n est une mesure finie sur $(X, \mathscr{B}(X))$. Soit $A \in \mathscr{B}(X)$, $\varepsilon > 0$. D'après la propriété précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $O_n \in \mathscr{O}(X)$ tel que $A \subset O_n$ et $\mu_n(O_n\backslash A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, *i.e*

$$\mu(O_n \cap E_n) = \mu(O_n \cap A \cap E_n) + \mu((O_n\backslash A) \cap E_n) \leqslant \mu(A \cap E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : "$\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right) \leqslant \mu(A \cap E_n) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$"
H_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie.
Comme $\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} (O_k \cap E_k)\right) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n+1} \mu(E_k) < +\infty$, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} (O_k \cap E_k)\right) = \mu(O_{n+1} \cap E_{n+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right) - \mu\left(O_{n+1} \cap E_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right)\right)$$
$$\leqslant \mu(A \cap E_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} - \mu\left(O_{n+1} \cap E_{n+1} \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right)\right)$$

d'après $(*)$ et H_n.
Or $A \cap E_n \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} (A \cap E_k) \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)$ et $A \cap E_n \subset O_{n+1} \cap E_{n+1}$ donc
$\mu(A \cap E_n) \leqslant \mu\left(O_{n+1} \cap E_{n+1} \cap \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right)\right) < +\infty$ d'où
$\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n+1} (O_k \cap E_k)\right) \leqslant \mu(A \cap E_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$
Finalement H_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence assure alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} (O_k \cap E_k)\right) \leqslant \mu(A \cap E_n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

On a alors, en passant à la limite :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n\cap \overset{\circ}{E_n})\right)\leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n\cap E_n)\right)\leqslant \mu(A)+\varepsilon$$

Or $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(A\cap \overset{\circ}{E_n})\subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(O_n\cap \overset{\circ}{E_n})$, et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(O_n\cap \overset{\circ}{E_n})$ est ouvert, d'où pour tout $A\in\mathscr{B}(X)$, il existe O ouvert tel que $A\subset O$ et $\mu(O)-\mu(A)\leqslant\varepsilon$.
Finalement, μ est bien extérieurement régulière.

(c) On note que pour tout F fermé, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F\cap E_n$ est fermé et est inclus dans le compact E_n donc comme $\mu(F)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(F\cap E_n)$, μ est bien intérieurement régulière. □

Proposition 2. *Soit μ une mesure régulière positive sur $(X,\mathscr{B}(X))$.*
Pour tout $A\in\mathscr{B}(X)$ de mesure finie, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F\subset A\subset O$ et $\mu(O\backslash F)\leqslant\varepsilon$.

Démonstration. Soit $A\in\mathscr{B}(X)$ de mesure finie, soit $\varepsilon>0$.
Comme μ est une mesure régulière, il existe (O_n) une suite d'ouverts de X telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A\subset O_n$ et $\mu(O_n)\longrightarrow\mu(A)$; il existe (F_n) une suite de compacts de X telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n\subset A$ et $\mu(F_n)\longrightarrow\mu(A)$.
On en déduit qu'il existe $n_0\in N$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $\mu(O_n)-\mu(A)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\mu(A)-\mu(F_n)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
$O=O_{n_0}$ est un ouvert, $F=F_{n_0}$ est un fermé, $F\subset A\subset O$ et $\mu(O\backslash F)\leqslant\mu(O\backslash A)+\mu(A\backslash F)\leqslant\varepsilon$.
Finalement, pour tout $A\in\mathscr{B}(X)$ de mesure finie, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F\subset A\subset O$ et $\mu(O\backslash F)\leqslant\varepsilon$. □

Remarque 1. *Si $d\geqslant 1$, la mesure de Lebesgue λ_d vérifie le corollaire précédent car c'est une mesure régulière.*

Définition 4. *Soit (E,d) un espace métrique, $f:E\to\mathbb{C}$ continue.*
On appelle support de f et on note supp(f) le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle ou, ce qui revient au même, l'adhérence de l'ensemble $\{x\in E; f(x)\neq 0\}$.

On note que cette définition ne convient plus pour des fonctions mesurables puisque celles-ci ne sont définies que presque partout.

Proposition 3. *Soit $d\geqslant 1$. On travaille sur $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$.*
Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert et f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i\subset\Omega$ telle que pour tout $i\in I$, $f=0$ λ_d-pp sur ω_i. On pose $\omega=\cup_{i\in I}\omega_i$.
Alors $f=0$ λ_d-pp sur ω.
On définit alors supp$(f)=\Omega\backslash\omega$.

Démonstration. L'ensemble I n'étant pas forcément dénombrable, il n'est pas évident que $f=0$ λ_d-pp sur ω. On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|.\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \{x \in \omega; d(x, \mathbb{R}^d \backslash \omega) \geqslant \frac{1}{n}, \|x\| \leqslant n\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n est un fermé borné de $\mathbb{R}^d$ donc K_n est compact.
On note que $\omega = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ car, comme ω est ouvert, $\mathbb{R}^d \backslash \omega$ est fermé donc pour tout $x \in \omega$, $d(x, \mathbb{R}^d \backslash \omega) > 0$ d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x, \mathbb{R}^d \backslash \omega) \geqslant \frac{1}{n_0}$ et $x \in K_n$ avec $n = \max\{n_0, \lfloor x \rfloor + 1\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \subset \cup_{i \in I} \omega_i$ donc, comme K_n est compact, il existe $I_n \subset I$ fini tel que $K_n \subset \cup_{i \in I_n} \omega_i$.
On pose $J = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. J est dénombrable et $\omega = \cup_{i \in J} \omega_i$. Or pour tout $i \in J$, $f = 0$ λ_d-pp sur ω_i d'où $f = 0$ λ_d-pp. □

Remarque 2. *(a) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions égales λ_d-pp sur Ω alors leurs supports sont égaux. On peut donc parler du support d'une fonction $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$.*
(b) On note que cette définition du support coïncide avec la définition 4 donnée pour les fonctions continues.

Nous souhaitons également rappeler la définition suivante :

Définition 5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.*
On dit qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ est étagée ssi elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

1.2 Les espaces $\mathscr{L}^p$, $1 \leqslant p < +\infty$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Par la suite, pour toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$, pour tout $x \in X$, on notera $\{f \geqslant x\}$, $\{f > x\}$, $\{f \leqslant x\}$ et $\{f < x\}$ les ensembles $f^{-1}([x, +\infty[)$, $f^{-1}(]x, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, x])$ et $f^{-1}(]-\infty, x[)$ respectivement.

Nous allons définir les espaces $\mathscr{L}^p$, $1 \leqslant p < +\infty$ et énoncer les propriétés qui leur sont relatives.

Définition 6. *Pour tout $p \in]0, +\infty[$, pour toute $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable, on pose :*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

avec la convention $(+\infty)^{\frac{1}{p}} = +\infty$.

Définition 7. *Pour tout $p \in]0, +\infty[$, on définit :*
$\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ *mesurable*; $\int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$
On utilisera la notation $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Proposition 4. *Pour tout $p > 0$, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Soit $p > 0$. Nous allons montrer que $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$ des fonctions de X dans $\mathbb{C}$.

— La fonction nulle appartient clairement à l'espace $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.

$$|\lambda f+g|^p \leqslant (|\lambda||f|+|g|)^p \leqslant (2max(|\lambda||f|,|g|))^p = 2^p max(|\lambda|^p|f|^p,|g|^p) \leqslant 2^p|\lambda|^p|f|^p+2^p|g|^p$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :
$\int_X |\lambda f + g|^p d\mu \leqslant 2^p|\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p \int_X |g|^p d\mu < +\infty$ car f et g sont dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Donc $\lambda f + g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. □

Proposition 5. *Si* $\mu(X) < +\infty$, *alors :*
$0 < p \leqslant q \implies \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $0 < p \leqslant q$.
Par propriété des puissances on obtient :

$$|f|^p \leqslant |f|^q \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant 1\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}}$$

$|f|^q \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant 1\}}$ est intégrable car $f \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}}$ est intégrable car $|f|$ est mesurable et $\mu(\{|f| \leqslant 1\}) \leqslant \mu(X) < +\infty$.
Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_X |f|^p d\mu \leqslant \int_X |f|^q \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant 1\}} d\mu + \int_X \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant 1\}} d\mu < +\infty$$

donc $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. □

Proposition 6. *Soit* $(p_1, p_2) \in [1, +\infty[^2$ *avec* $p_1 \leqslant p_2$.
Pour tout $p \in [p_1, p_2]$, *on a l'inclusion :*

$$\mathscr{L}^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$$

Démonstration. Soit $p \in [p_1, p_2]$, $f \in \mathscr{L}^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu)$.
On pose $A = \{|f| \geqslant 1\}$. On a : $(|f|\mathbb{1}_A)^p \leqslant |f|^{p_2}$ et $(|f|\mathbb{1}_{^cA})^p \leqslant |f|^{p_1}$ donc :

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_{^cA} |f|^p d\mu \leqslant \int_X |f|^{p_2} d\mu + \int_X |f|^{p_1} d\mu < +\infty$$

car $f \in \mathscr{L}^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu)$, donc $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Donc pour tout $p \in [p_1, p_2]$, on a l'inclusion :

$$\mathscr{L}^{p_1}_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathscr{L}^{p_2}_{\mathbb{C}}(\mu) \subset \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$$

□

1.3 Des espaces $\mathscr{L}^p$ aux espaces L^p

Les espaces $\mathscr{L}^p$ n'étant pas normés, nous allons introduire les espaces L^p qui le seront et qui seront issus des espaces $\mathscr{L}^p$.

Définition 8. *Soit* (E, N) *un* $\mathbb{C}$-*espace vectoriel semi-normé.*
L'ensemble $V \overset{\text{def}}{=} \{x \in E; N(x) = 0\}$ *est un* $\mathbb{C}$-*sous-espace vectoriel de* E, *appelé noyau de la semi-norme* N.

Démonstration. $0_E \in V$ donc V est non vide. Soit $\lambda \in \mathbb{C}, (x,y) \in V^2$.
$N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y) = 0$ donc $\lambda x + y \in V$. $\square$

La relation $\sim$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \iff x - y \in V$ est une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire (ie si $x \sim x'$ et $y \sim y'$ alors $\lambda x + y \sim \lambda x' + y'$ puisque $N((\lambda x + y) - (\lambda x' + y')) \leqslant |\lambda| N(x - x') + N(y - y') = 0$).

L'ensemble quotient $\overline{E} \overset{\text{def}}{=} \{\overline{x}; x \in E\}$ des classes d'équivalence de la relation $\sim$ est alors naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, dite structure d'espace-vectoriel quotient, définie à partir des opérations suivantes :
$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y}$ et $\lambda.\overline{x} = \overline{\lambda.x}$.

L'ensemble $\overline{E}$, généralement noté E/V est appelé l'espace quotient de E par V. On le munit alors de $\overline{N} : \overline{x} \mapsto N(x)$ (cette application est bien définie car si $\overline{x} = \overline{y}$ alors $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) = 0$ donc $N(x) = N(y)$).

On vérifie alors que $(E/V, \overline{N})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. On a ainsi construit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé canoniquement associé au $\mathbb{C}$-espace vectoriel semi normé (E, N).

Démonstration. Montrons que $(E/V, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- Montrons que $(E/V, +)$ est un groupe commutatif.
  - La loi + est bien associative
  - On note que $\forall \overline{x} \in E/V$, $\overline{x} + \overline{0_E} = \overline{0_E} + \overline{x} = \overline{x}$
  - On note que $\forall \overline{x} \in E/V$, $\overline{x} + \overline{-x} = \overline{-x} + \overline{x} = \overline{0_E}$
  - $\forall (\overline{x}, \overline{y}) \in (E/V)^2$, $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} = \overline{y + x} = \overline{y} + \overline{x}$

  D'où $(E/V, +)$ est bien un groupe commutatif.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall \overline{x} \in E/V$, $\lambda.(\mu.\overline{x}) = \overline{\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x} = (\lambda\mu).\overline{x}$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall \overline{x} \in E/V$, $(\lambda + \mu).\overline{x} = \overline{(\lambda + \mu).x} = \overline{\lambda.x + \mu.x} = \overline{\lambda.x} + \overline{\mu.x} = \lambda.\overline{x} + \mu.\overline{x}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall (\overline{x}, \overline{y}) \in (E/V)^2$, $\lambda.(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda.\overline{x + y} = \overline{\lambda.(x + y)} = \overline{\lambda.x + \lambda.y} = \overline{\lambda.x} + \overline{\lambda.y} = \lambda.\overline{x} + \lambda.\overline{y}$
- $\forall \overline{x} \in E/V$, $1.\overline{x} = \overline{x}$ $\square$

Finalement, $(E/V, +, .)$ est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Les espaces $(\mathscr{L}^p(\mu), \|.\|_p)$ n'étant pas des espaces vectoriels normés, on introduit, pour $p \geqslant 1$, les espaces normés $(L^p(\mu), \overline{\|.\|_p})$. Ceux-ci se construisent à partir des espaces semi-normés $(\mathscr{L}^p(\mu), \|.\|_p)$ par application de la procédure canonique décrite ci-avant. Il faut cependant d'abord démontrer que pour tout $p \in [1; +\infty[$, $\|.\|_p$ est une semi norme.

Lemme 2 (Inégalité de Young)**.** *Pour tout u, v dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]0,1[$,*

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leqslant \alpha u + (1 - \alpha) v$$

Il y a égalité si et seulement si $u = v$.

Démonstration. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\alpha \in]0,1[$.
Comme la dérivée seconde de ln est $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$, *ln* est strictement concave sur $]0, +\infty[$,
donc pour $u \neq v$, $\alpha \ln(u) + (1 - \alpha) \ln(v) < \ln(\alpha u + (1 - \alpha) v)$ d'où par stricte croissance de l'exponentielle, $u^\alpha v^{1-\alpha} < \alpha u + (1 - \alpha) v$.
De plus si $u = v$ alors $u^\alpha u^{1-\alpha} = u = \alpha u + (1 - \alpha) u$ et d'après ce qu'on a fait avant, on n'a égalité que dans ce cas là. $\square$

Théorème 3 (Inégalité de Hölder). *Soit $f, g : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurables et $p,q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*
Si f et g sont réelles positives, alors

$$0 \leqslant \int_X fg d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant +\infty$$

Si $\|f\|_p + \|g\|_q < +\infty$, il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\alpha f^p = \beta g^q \mu$-p.p.
Si $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$ alors $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\alpha |f|^p = \beta |g|^q \mu$-p.p.

Démonstration. Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p ou $g = 0$ μ-p.p, donc $fg = 0$ μ-p.p et l'inégalité est $0 \leqslant 0$.
Si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$ l'inégalité est évidente.
Sinon $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
On suppose f et g réelles positives.
On applique l'inégalité de Young avec $\alpha = \frac{1}{p} \in]0,1[$ et $u = \frac{f^p(x)}{\|f\|_p}$ et $v = \frac{g^q(x)}{\|g\|_q}$ pour tout $x \in X$.
Alors on a :

$$\forall x \in X \ \frac{f(x)g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q} (*)$$

et on a égalité avec les $x \in X$ tels que $\frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} = \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q}$.
Puis en intégrant $(*)$ par rapport à μ, on a :

$$0 \leqslant \int_X fg d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} \int_X \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q} d\mu(x) \right)$$

Mais

$$\frac{1}{p} \int_X \frac{f^p(x)}{\|f\|_p^p} d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X \frac{g^q(x)}{\|g\|_q^q} d\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

d'où l'inégalité de Hölder, avec égalité si et seulement si $\frac{fg}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{1}{p} \frac{f^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{g^q}{\|g\|_q^q}$ μpp d'après l'inégalité de Young si et seulement si $\frac{f^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g^q}{\|g\|_q^q}$ μpp, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in {\mathbb{R}_+}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que $\alpha f^p = \beta g^q \mu$pp.
Pour $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$, on refait la même chose avec $|f|$ et $|g|$. □

Corollaire 1. *Soit $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Démonstration. On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leqslant \int_X |fg| d\mu$$

puis c'est l'inégalité de Hölder. □

Corollaire 2 (Cauchy-Schwarz). *Soit* $f, g \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$
Alors $f\bar{g} \in \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ *et* $\left|\int_X f\bar{g}d\mu\right| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.

Lemme 3 (Inégalité de Minkowski). *Soit* $f, g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ *et soit* $p \in [1, +\infty[$

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Il y a égalité si et seulement si $f = 0$ *μ-pp ou* $g = \alpha f$ *μ-pp avec* $\alpha \geqslant 0$.

Démonstration. On a, pour $p \in [1, +\infty[$:

$$|f + g|^p \leqslant |f + g|^{p-1}|f| + |g||f + g|^{p-1}(*)$$

On intègre par rapport à μ (on a des fonctions positives mesurables) :

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \int_X |f||f + g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1}d\mu$$

Si $p = 1$ on a l'inégalité. Sinon on utilise l'inégalité de Hölder et on a :

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \|f\|_p\left(\int_X |f + g|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p\left(\int_X |f + g|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Or $(p - 1)q = p$ car $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, donc

$$\|f + g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_X |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1}$$

Si $f + g = 0$ μ-pp, le résultat est immédiat. On ne se place donc pas dans ce cas de figure. Or, $f + g \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ donc $\|f + g\|_p < +\infty$, donc on simplifie par $\|f + g\|_p^{p-1}$ et on obtient l'inégalité de Minkowski.
Pour le cas d'égalité, on a $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$
Si $p > 1$, il vient par double application du cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, qu'il existe $(\beta, \gamma), (\delta, \varepsilon) \in {\mathbb{R}_+}^2\backslash\{(0, 0)\}$ tels que $\beta|f + g|^p = \beta(|f + g|^{p-1})^q = \gamma|f|^p$ μpp et $\delta|f + g|^p = \delta(|f + g|^{p-1})^q = \varepsilon|g|^p$ μpp.
Si f ou $g = 0$ μpp, l'égalité est immédiate.
Sinon f et g ne sont pas nulles μpp. Il ne peut y avoir égalité lorsque $f + g = 0$ μpp car $\|f\|_p$ et $\|g\|_p$ sont strictement positifs. Donc $f + g$ n'est pas nulle μpp et donc $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont strictement positifs.
En particulier, $|g|^p = \dfrac{\gamma\delta}{\beta\varepsilon}|f|^p$ μpp, soit encore $|g| = \alpha|f|$ μpp avec $\alpha > 0$. On en déduit que $f = g = 0$ μpp sur $\{f + g = 0\} = \{f = -g\}$ *i.e* $g = \alpha f$ μpp sur $\{f + g = 0\}$.
D'autre part on doit avoir égalité μpp dans l'inégalité $(*)$, *i.e*$|f + g| = |f| + |g|$ μpp sur

$\{f+g\neq 0\}$.
En élevant au carré, on a $|f|^2+|g|^2+2\mathfrak{Re}(f\bar{g})=|f|^2+|g|^2+2|f||g|$ μpp sur $\{f+g\neq 0\}$.
Etant donné que $|f||g|=|f\bar{g}|$ et que $\mathfrak{Re}(z)=|z|$ si et seulement si $z\in\mathbb{R}_+$, on a donc $f\bar{g}=|fg|\geqslant 0$ μpp sur $\{f+g\neq 0\}$.
Par conséquent,$f|g|^2=|f||g|g$ μpp sur $\{f+g\neq 0\}$. Or $f\neq 0$ et $g\neq 0$ sur $\{f+g\neq 0\}$ et l'on peut donc écrire que $g=\dfrac{|g|}{|f|}f=\alpha f$ μpp sur $\{f+g\neq 0\}$. D'où $g=\alpha f$ μpp.
On a donc égalité, pour $p>1$, si et seulement si

$$f=0 \ \textit{ou}\ g=0\ \mu pp\ \textit{ou}\ g=\alpha f\ \ \mu pp\ \textit{pour un}\ \alpha>0$$

i.e si et seulement si $f=0$ ou $g=\alpha f$ *μpp* pour un $\alpha\geqslant 0$.
Si $p=1$, $\|f+g\|_1=\|f\|_1+\|g\|_1$ ssi $|f+g|=|f|+|g|$ μpp ssi $f\bar{g}\geqslant 0$ ssi ($f=0$ μ-pp ou $g=\alpha f$ μ-pp avec $\alpha\geqslant 0$). □

Proposition 7. *Soit $p\in[1,+\infty[$ $(\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu),\ \|.\|_p)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel semi-normé.*

Démonstration. $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Montrons que $\|.\|_p$ est une semi-norme. On a :

— $\|0\|_p=(\int_X|0|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}=0$

— $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ $\|\lambda f\|_p=\left(\int_X|\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\|f\|_p$ par positivité de l'intégrale.

— D'après l'inégalité de Minkowski, l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Donc $\|.\|_p$ est bien une semi-norme.
D'où $(\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu),\ \|.\|_p)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel semi-normé. □

Définition 9. *Pour tout $p\geqslant 1$, on pose $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)/\{\|.\|_p=0\}$.*

Proposition 8. *$(L^p_{\mathbb{C}}(\mu),\|.\|_p)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.*

Démonstration. Ceci découle du procédé décrit à la page 10. □

Remarque 3. — *On a noté $\|.\|_p$ au lieu de $\overline{\|.\|}_p$.*

— *Soit $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. $\|f\|_p=0$ ssi $|f|^p=0$ μpp ssi $f=0$ μpp.*
D'où $\overline{f}=\{g\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu); f=g\ \ \mu pp\}$.

— *Dans la suite, nous désignerons indifféremment par f la fonction $f\in\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ ou sa classe $\overline{f}\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

1.4 Complétudes des espaces L^p, $1\leqslant p<+\infty$

Nous allons montrer la complétude des espaces L^p, $1\leqslant p<+\infty$ à l'aide des deux lemmes énoncés ci-dessous.

Lemme 4 (Inégalité de Minkowski généralisée)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives de $(X,\mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.*
Pour tout $p\in[1,+\infty[$,

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n\right\|_p\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_p\leqslant+\infty$$

Démonstration. Si f, g sont des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives, alors

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \leqslant +\infty$$

En effet, si $\|f\|_p + \|g\|_p = +\infty$, le résultat est immédiat. Sinon, il s'agit de l'inégalité de Minkowski classique.
On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p \leqslant +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n \overset{\text{def}}{=} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k \right)^p$.

$(S_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que $S_n \xrightarrow{\mu-pp} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k \right)^p$ car la fonction puissance est continue.
D'après le théorème de convergence monotone, on a alors :

$$\int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \right)^p d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \right)^p d\mu$$

Donc :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \right\|_p = \lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leqslant +\infty$$

□

Lemme 5. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.*
$(E, \|.\|)$ est un espace de Banach ssi toute série normalement convergente de E est convergente dans E.

Démonstration. On suppose que E est un espace de Banach. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty$.
$(S_n)_n \overset{\text{def}}{=} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \|x_k\| \right)_n$ est convergente donc de Cauchy d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leqslant \varepsilon$$

D'où :

$$\forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k \right)_n$ est une suite de Cauchy dans E, qui est un espace de Banach, d'où sa convergence dans E.

On suppose que toute série normalement convergente est convergente. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}; \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p \geqslant N_k, q \geqslant N_k) \implies \|u_p - u_q\| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

On prend les N_k, $k \in \mathbb{N}^*$ de manière à en constituer une sous-suite strictement croissante. Considérons alors la série de terme général $v_n \overset{\text{def}}{=} u_{N_n} - u_{N_{n-1}}$, dont la somme partielle S_n de rang $n \geqslant 2$ va s'écrire :

$$S_n = (u_{N_2} - u_{N_1}) + (u_{N_3} - u_{N_2}) + \cdots + (u_{N_{n-1}} - u_{N_{n-2}}) + (u_{N_n} - u_{N_{n-1}})$$

Or $\sum \|u_{N_n} - u_{N_{n-1}}\|$ converge car la somme de cette série est majorée par la somme de la série $\sum \frac{1}{2^n}$ qui est convergente.
D'après l'hypothèse de départ, on a alors $(S_n)_n$ qui converge dans E. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = s \in E$.
Or, pour tout $n \geqslant 2$, $S_n = -u_{N_1} + u_{N_n}$ d'où $(u_{N_n})_n$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{N_n} = s + u_{N_1} \in E$.
$(u_n)_n$ admet donc une sous-suite convergente d'où, comme (u_n) est de Cauchy, elle converge.
Finalement, E est bien complet. □

Théorème 4 (Riesz-Fischer)**.** *(i) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace vectoriel normé $(\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \|.\|_p)$ est complet.*
(ii) Soit $p \in [1; +\infty[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Si $\|f_n - f\|_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et une fonction $g \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ telles que :
- *— $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{\phi(n)}| \leqslant g$ μ-pp*
- *— $f_{\phi(n)} \to f$ μ-pp*

Démonstration. (i) Soit $p \in [1, +\infty[$. D'après le lemme 5, il suffit de montrer que toute série normalement convergente dans $(\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \|.\|_p)$ est convergente.
Soit $(u_n) \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_p < +\infty$.
D'après le lemme 4, $\| \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \|_p \leqslant \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_p < +\infty$. Donc, pour μ-presque tout $x \in X$, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)|$ est convergente.
Le corps $\mathbb{C}$ étant complet, la série de terme général $u_n(x)$ converge dans $\mathbb{C}$ pour μ-presque tout $x \in X$ (cf le lemme 5).
On pose alors :

$$U : \begin{cases} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n(x) & \text{si } \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)| < +\infty \\ x & \mapsto & 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

U est mesurable et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| U - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \ \mu\text{-pp}.$$

Or :

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \right)_n \text{ converge vers 0 donc } \sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu-pp} U.$$

De plus, d'après le lemme 4, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| U - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\|_p \leqslant \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \right\|_p \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_p$$

Or (u_n) est un terme général de série normalement convergente donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_p} U$$

(ii) En reprenant la démonstration réciproque du lemme 5, on note qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})$ telle que la série de terme général $\|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\|_p$ converge. D'après le point (i) on sait que $(f_{\phi(n)} - f_{\phi(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp et dans $\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ donc que $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp et dans $\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ d'où, par unicité de la limite dans $\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-pp vers f.
De plus, $g := |f_{\phi(0)}| + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}|$ vérifie bien $g \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_{\phi(n)}| \leqslant g$ μ-pp. □

2 Les cas particuliers des espaces L^∞ et L^2

2.1 Le cas $p = +\infty$

Nous allons introduire l'espace $\mathscr{L}^\infty$ et comme précédemment, comme celui-ci n'est pas normé, nous allons refaire le même travail que précédemment avec L^∞.
Dans cette sous-section, on suppose que la mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ n'est pas nulle.

Définition 10. *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable. On définit le supremum essentiel de f par :* $supess(f) \overset{\text{def}}{=} inf\{M > 0; \mu(\{f > M\}) = 0\} \geqslant 0$ *avec la convention* $inf(\varnothing) = +\infty$*.*

On notera que le fait d'avoir supposé la mesure μ non nulle permet d'éviter le cas de figure $supess(f) = 0$ pour toute f mesurable positive.

Proposition 9. *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable.*
Si supess(f)$< +\infty$, alors supess(f)$= min\{M > 0; \mu(\{f > M\}) = 0\}$ i.e
- $\forall M \geqslant$ *supess(f)*, $\mu(\{f > M\}) = 0$
- $\forall M <$ *supess(f)*, $\mu(\{f > M\}) > 0$

Démonstration. Par définition de $supess(f)$, on a bien que, pour tout $M < supess(f)$, $\mu(\{f > M\}) > 0$.
Soit $(M, N) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Si $M \geqslant N$, $\{f > M\} \subset \{f > N\}$ donc $\mu(\{f > M\}) \leqslant \mu(\{f > N\})$. Donc la fonction $M \mapsto \mu(\{f > M\})$ est décroissante positive. Il suffit alors de montrer que $\mu(\{f > supess(f)\}) = 0$.

Or, comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, que $\forall(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2, n\leqslant m \implies \{f > supess(f)+\frac{1}{n}\}\subset\{f>supess(f)+\frac{1}{m}\}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, supess(f)+\frac{1}{n} > supess(f)$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(\{f>supess(f)\}) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{f>supess(f)+\frac{1}{n}\}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\mu\left(\{f>supess(f)+\frac{1}{n}\}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

□

Définition 11. *(i) Soit $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ mesurable. On pose $\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} supess(|f|)$*
(ii) On note $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)\overset{\text{def}}{=}\{f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}\text{ mesurable}; \|f\|_\infty<+\infty\}$ l'ensemble des fonctions μ-essentiellement bornées.

Remarque 4. — *Si $f=g$ μpp, alors $supess(f)=supess(g)$*
— *Si la fonction $f:(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{C},\mathscr{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable bornée, alors $f\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ et, si $\|f\|_{sup}\overset{\text{def}}{=} sup\{|f(x)|,x\in X\}$, $\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_{sup}$ car $\mu(\{f>\|f\|_{sup}\})=\mu(\varnothing)=0$*

Lemme 6. *Soit $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable.*
$f\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ ssi il existe $g:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ mesurable bornée telle que $f=g$ μpp et $\|g\|_\infty=\|g\|_{sup}=\|f\|_\infty$.

Démonstration. ($\Leftarrow$) On sait que $f=g$ μpp donc $\mu(\{|f|>\|g\|_{sup}\})=\mu(\{|g|>\|g\|_{sup}\})=0$ d'où, comme $\|g\|_{sup}<+\infty$, $f\in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$.
($\Rightarrow$) On pose $g\overset{\text{def}}{=} f\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant\|f\|_\infty\}}$ qui est mesurable (produit de fonctions mesurables puisque f est mesurable).
$\{f\neq g\}=\{|f|>\|f\|_\infty\}$ est négligeable par définition de $\|f\|_\infty$, donc $f=g$ μpp, d'où $\|g\|_\infty=\|f\|_\infty$.
De plus, comme $|g|\leqslant\|g\|_\infty$, on a $\|g\|_{sup}\leqslant\|g\|_\infty$. Or $\|g\|_\infty\leqslant\|g\|_{sup}$, d'où il existe
$g:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ mesurable bornée telle que $f=g$ μpp et $\|g\|_\infty=\|g\|_{sup}=\|f\|_\infty$. □

Théorème 5. *(a) $(\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu),\|.\|_\infty)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel semi-normé et $\{\|.\|_\infty=0\}=\{f\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu); f=0\ \ \mu pp\}$.*
(b) L'espace vectoriel normé quotient $L^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)\overset{\text{def}}{=}\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}/\{\|.\|_\infty=0\}$, muni de $\|.\|_\infty$, est un espace de Banach.

Démonstration. (a)Montrons que $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathscr{F}(X,\mathbb{C})$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, $(f,g)\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)^2$.
Il existe $h,l:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ mesurables bornées telles que $f=h$ μpp, $g=l$ μpp et $\|h\|_\infty=\|h\|_{sup}=\|f\|_\infty$,$\|l\|_\infty=\|l\|_{sup}=\|g\|_\infty$.
$\lambda f+g=\lambda h+l$ μpp et $\|.\|_{sup}$ est une norme sur l'espace des fonctions bornées donc :

$$\|\lambda f+g\|_\infty=\|\lambda h+l\|_\infty\leqslant\|\lambda h+l\|_{sup}\leqslant|\lambda|\|h\|_{sup}+\|l\|_{sup}<+\infty$$

Donc $\lambda f+g\in\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Soit $(f_1, f_2) \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)^2$. On leur associe g_1, g_2 définies comme dans le lemme 6. $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ μpp donc :

$$\|f_1 + f_2\|_\infty \leqslant \|g_1 + g_2\|_{sup} \leqslant \|g_1\|_{sup} + \|g_2\|_{sup} = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$$

- $\|0\|_\infty = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$. On associe à f une fonction g comme dans le lemme 6.
$\|\lambda f\|_\infty = \|\lambda g\|_\infty = \|\lambda g\|_{sup} = |\lambda| \|g\|_{sup} = |\lambda| \|f\|_\infty$
Donc $\|.\|_\infty$ est bien une semi-norme.

On note que $\{f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu); f = 0 \ \ \mu pp\} \subset \{\|.\|_\infty = 0\}$.
Soit $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ telle que $\|f\|_\infty = 0$.
On lui associe une fonction g comme dans le lemme 6.
$\|g\|_{sup} = 0$ donc $g = 0$ car $(\mathscr{B}(X, \mathbb{C}), \|.\|_{sup})$ est un espace vectoriel normé, d'où $f = 0$ μpp.
Donc $\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathscr{F}(X, \mathbb{C})$.

(b) On sait déjà que l'espace $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|.\|_{sup}$ est complet.
Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(\mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu), \|.\|_\infty)$.
On pose

$$A_\infty \overset{\text{def}}{=} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| > \|f\|_\infty\} \right) \bigcup \left(\bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \{|f_n - f_m| \geqslant \|f_n - f_m\|_\infty\} \right)$$

A_∞ est négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_n \mathbb{1}_{^c A_\infty}$. On a :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, |g_n - g_m| = |f_n - f_m| \mathbb{1}_{^c A_\infty} \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$$

d'où $\|g_n - g_m\|_{sup} \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow{n,m \to +\infty} 0$.
La suite (g_n) est donc de Cauchy dans $(\mathscr{B}(X, \mathbb{C}), \|.\|_{sup})$, d'où il existe $g \in \mathscr{B}(X, \mathbb{C})$, telle que $g_n \xrightarrow{\|.\|_{sup}} g$. En particulier, (g_n) converge simplement vers g sur X puisque la convergence uniforme implique la convergence simple donc g est mesurable car les g_n, $n \in \mathbb{N}$ le sont.
De plus :

$$\|f_n - g\|_\infty \leqslant \|(g_n - g)\mathbb{1}_{^c A_\infty}\|_\infty + \|(f_n - g_n)\mathbb{1}_{^c A_\infty}\|_\infty \leqslant \|g_n - g\|_\infty + 0 \leqslant \|g_n - g\|_{sup} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Donc l'espace vectoriel normé quotient $L^\infty_{\mathbb{C}}(\mu) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}} / \{\|.\|_\infty = 0\}$, muni de $\|.\|_\infty$, est un espace de Banach. □

Proposition 10. *(a) (Inégalité de Hölder) Si $(f, g) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \times \mathscr{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$ alors $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et*

$$\int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

(b) Pour toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$, on a :

$$\|f\|_\infty \leqslant \varliminf_{p \to +\infty} \|f\|_p$$

(c) On a :

$$\forall f \in \bigcup_{p>0} \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

ce qui justifie en partie la notation $\|.\|_\infty$.

Démonstration. (a) On sait qu'on a $|fg| \leqslant |f| \|g\|_\infty \mu$pp d'où $fg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et

$$\int_X |fg| d\mu \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty < +\infty$$

(b) Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $f = 0$ μpp donc pour tout $p > 0, \|f\|_p = 0$ d'où l'inégalité.
Sinon $\|f\|_\infty > 0$ et : pour tout $A \in]0, \|f\|_\infty[$, pour tout $p > 0$, $|f|^p \geqslant A^p \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant A\}}$. Deux cas sont alors possibles :

— il existe $A_0 \in]0, \|f\|_\infty[$ tel que $\mu(\{|f| \geqslant A_0\}) = +\infty$:
$\forall p > 0$ $\|f\|_p = +\infty$ d'où $\underline{\lim}_{p\to+\infty} \|f\|_p = +\infty \geqslant \|f\|_\infty$

— Pour tout $A \in]0, \|f\|_\infty[$, $\mu(\{|f| \geqslant A\}) < +\infty$:
Pour tout $p > 0, \|f\|_p \geqslant A\mu(\{|f| \geqslant A\})^{\frac{1}{p}}$. Or, $0 < \mu(\{|f| \geqslant A\}) < +\infty$ donc $\mu(\{|f| \geqslant A\})^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p\to+\infty} 1$, donc pour tout $A \in]0, \|f\|_\infty[$, $\underline{\lim}_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant A$, on a alors $\|f\|_\infty \leqslant \underline{\lim}_{p\to+\infty} \|f\|_p$

(c) Soit $f \in \bigcup_{p>0} \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$. Il existe $r > 0$ tel que f appartienne à $\mathscr{L}^r_{\mathbb{C}}(\mu)$.D'après le point (b), il suffit de montrer que $\overline{\lim}_{p\to+\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$. Si $\|f\|_\infty = 0$ ou $+\infty$, le résultat est immédiat. Sinon, $\dfrac{|f|}{\|f\|_\infty} \leqslant 1$ μpp d'où, pour tout $p \geqslant r > 0$, $\dfrac{|f|^p}{\|f\|_\infty^p} \leqslant \dfrac{|f|^r}{\|f\|_\infty^r}$ μpp donc $\|f\|_p \leqslant \left(\dfrac{\|f\|_r}{\|f\|_\infty}\right)^{\frac{r}{p}} \|f\|_\infty$.
Finalement, on a bien :

$$\forall f \in \bigcup_{p>0} \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu), \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \qquad \square$$

.

2.2 Le cas $p = 2$

L^2 est un espace de Hilbert, contrairement aux autres espaces L^p, $p \neq 2$ et possède à ce titre des propriétés intéressantes que nous allons énoncer ci-dessous.

Définition 12. *Soit E un espace vectoriel.*
$\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *est une forme sesquilinéaire ssi Φ vérifie :*
(i) Si $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

$$\Phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda\Phi(x_1, y) + \Phi(x_1, y)$$
$$\Phi(x, \lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}\Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2)$$

(ii) Si $(x, y) \in E^2$ alors :

$$\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$$

(iii) Si $f \in E$ alors :

$$\Phi(f, f) \in \mathbb{R}, \Phi(f, f) \geqslant 0, \text{ et } \Phi(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$$

Proposition 11. $\mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ *est muni d'un produit scalaire.*

Démonstration. Montrons que l'application définie sur $\mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) \times \mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ par :
$(f,g) \mapsto < f,g >= \int_X f\overline{g}d\mu$ est une application sesquilinéaire.
(i) Soient $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu), \lambda \in \mathbb{C}$.
Par linéarité de l'intégrale :

$$< \lambda f_1 + f_2, g >= \int_X (\lambda f_1 + f_2)\overline{g}d\mu = \lambda \int_X f_1\overline{g}d\mu + \int_X f_2\overline{g}d\mu = \lambda < f_1, g > + < f_2, g >$$

$$< f, \lambda g_1 + g_2 >= \int_X f\overline{(\lambda g_1 + g_2)}d\mu = \overline{\lambda} \int_X f\overline{g_1}d\mu + \int_X f\overline{g_2}d\mu = \overline{\lambda} < f, g_1 > + < f, g_2 >$$

Donc l'application est linéaire selon la première variable et semi-linéaire par rapport à l'autre variable.

(ii) Soient $f, g \in \mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Par propriété de la conjugaison :

$$< f,g >= \int_X f\overline{g}d\mu = \int_X \overline{g\overline{f}}d\mu = \overline{\int_X g\overline{f}d\mu} = \overline{< g,f >}$$

(iii) Soit $f \in \mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.

$$< f,f >= \int_X f\overline{f}d\mu = \int_X |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2$$

Donc $< f,f >\geqslant 0$ et $< f,f >= 0 \Leftrightarrow f = 0$ car $\|.\|_2$ est une norme. Donc l'application est définie positive.

Donc $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire. □

Lemme 7 (Identité du parallélogramme)**.** *Soit f et g dans $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$,*

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$$

Démonstration. Par définition de la norme sur $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$, on a pour f et g dans $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$,

$$\|f+g\|_2^2 = \int_X (f+g)\overline{(f+g)}d\mu = \int_X (f\overline{f})d\mu + \int_X (f\overline{g})d\mu + \int_X (g\overline{f})d\mu + \int_X (g\overline{g})d\mu$$

Mais on a :

$$\int_X (f\overline{g})d\mu + \int_X (g\overline{f})d\mu = \int_X (f\overline{g})d\mu + \overline{\int_X (f\overline{g})d\mu} = 2\mathfrak{Re}(< f, \overline{g} >)$$

Donc on a :

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\mathfrak{Re}(< f, \overline{g} >)$$

et de même on a

$$\|f-g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(< f, \overline{g} >)$$

D'où, en sommant, $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$. □

Théorème 6. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de $\mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$. Soit $g \in \mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.*
Alors :
(i) Il existe un unique $f \in F$ et un unique $h \in F^{\perp}$ tel que $g = f + h$
(ii) $\mathsf{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) = F \oplus F^{\perp}$
(iii) On appelle la fonction f projection orthogonale de g sur F. Elle est caractérisée par : $\|g - f\|_2 = min_{\varphi \in F}\|g - \varphi\|_2$

Démonstration. On pose $d = \underset{\varphi \in F}{inf}\|g - \varphi\|_2 \in \mathbb{R}^+$.
D'après le théorème de caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $d = \lim\limits_{n\to+\infty} \|g - \varphi_n\|_2$
Montrons que (φ_n) est de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
D'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\begin{aligned}\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2} - g\right\|_2^2 + \left\|\frac{\varphi_m - \varphi_n}{2}\right\|_2^2 &= \left\|\frac{\varphi_m - g}{2} + \frac{\varphi_n - g}{2}\right\|_2^2 + \left\|\frac{\varphi_m - g}{2} - \frac{\varphi_n - g}{2}\right\|_2^2 \\ &= 2\left(\left\|\frac{\varphi_m - g}{2}\right\|_2^2 + \left\|\frac{\varphi_n - g}{2}\right\|_2^2\right)\end{aligned}$$

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. $\dfrac{\varphi_n + \varphi_m}{2} \in F$ car F est un sous-espace vectoriel, donc

$$\left\|\frac{\varphi_n + \varphi_m}{2} - g\right\|_2^2 \geqslant d^2$$

D'où :

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_2^2 = 4\left\|\frac{\varphi_m - \varphi_n}{2}\right\|_2^2 \leqslant 4 \times 2\left(\frac{\|\varphi_m - g\|_2^2}{4} + \frac{\|\varphi_n - g\|_2^2}{4}\right) - 4d^2$$

d'où, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_2^2 \leqslant 2(\|\varphi_m - g\|_2^2 + \|\varphi_n - g\|_2^2 - 2d^2) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

car $\|\varphi_n - g\|_2^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} d$. Donc (φ_n) est de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Comme F est fermé, et $(L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \|\cdot\|_2)$ est complet, $(F, \|\cdot\|_2)$ est complet,
donc (φ_n) converge vers une fonction $f \in F$. On a donc bien $f \in F$ et $\|g-f\|_2 = \underset{\varphi\in F}{min}\|g-\varphi\|_2 = d$.
On pose $h = g - f$.
Montrons que pour tout $\varphi \in F, < \varphi, h >= 0$.
Soit $\varphi \in F$.
$\forall t > 0, f + t\varphi \in F$ donc :

$$\|h\|_2^2 = \|g - f\|_2^2 \leqslant \|g - f - t\varphi\|_2^2 = \|h - t\varphi\|_2^2 = \|h\|_2^2 + t^2\|\varphi\|_2^2 - 2t\mathfrak{Re}(< h, \varphi >)$$

d'où $t\|\varphi\|_2^2 - 2\mathfrak{Re}(< h, \varphi >) \geqslant 0$ donc en faisant tendre t vers 0, on a pour tout $\varphi \in F$ $\mathfrak{Re}(< h, \varphi >) \leqslant 0$.
Pour tout $\varphi \in F$, -$\varphi \in F$ donc $\mathfrak{Re}(< h, \varphi >) = -\mathfrak{Re}(< h, -\varphi >) \geqslant 0$

Donc pour tout $\varphi \in F$ $\mathfrak{Re}(< h, \varphi >) = 0$
On a pour tout $\varphi \in F$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(< h, \varphi >) &= \frac{1}{2i}\left(\int_X h\overline{\varphi} d\mu - \int_X \varphi\overline{h} d\mu\right) \\
&= \frac{-i}{2}\left(\int_X h\overline{\varphi} d\mu - \int_X \varphi\overline{h} d\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_X h(-i\overline{\varphi}) d\mu + \int_X i\varphi\overline{h} d\mu\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_X h(\overline{(i\varphi)} d\mu + \int_X i\varphi\overline{h} d\mu\right) \\
&= \mathfrak{Re}(< h, i\varphi >) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $i\varphi \in F$. Donc $\forall \varphi \in F < h, \varphi >= 0$.
Montrons l'unicité de la décomposition.
Si $g = f + h = f' + h'$ avec $f, f' \in F$ et $h, h' \in F^\perp$ alors on a $f - f' = h' - h$ donc $\|f' - f\|_2^2 =< f' - f, f' - f >=< f' - f, f' > - < f' - f, f >=< h - h', f' > - < h - h', f >= 0 - 0 = 0$ car $h - h' \in F^\perp$. Donc $f - f' = 0$ et $h - h' = 0$, d'où le résultat. □

Lemme 8 (Riesz-Fischer)**.** *Soit $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une unique fonction g telle que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \varphi(f) = \int_X f\overline{g} d\mu$.*

Démonstration. Comme φ est continue et que $\{0\}$ est un fermé, $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Si $\varphi = 0$, alors $g = 0$ convient.
Sinon, $F^\perp \neq \{0\}$ donc il existe $h \in F^\perp \backslash \{0\}$. On pose $g = \dfrac{\overline{\varphi(h)}}{\|h\|_2^2} h \in F^\perp$. On a bien $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.
Comme $\varphi(g) \neq 0$, on peut poser $\lambda = \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(g)} \in \mathbb{C}$.
On a alors $\varphi(f - \lambda g) = \varphi(f) - \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(g)}\varphi(g) = 0$.
D'où $f - \lambda g \in F = \varphi^{-1}(\{0\})$, d'où $< f - \lambda g, g >= 0$ car $g \in F^\perp$.
Donc $\lambda = \dfrac{< f, g >}{\|g\|_2^2}$ i.e $\varphi(f) = \lambda\varphi(g) = \dfrac{\varphi(g)}{\|g\|_2^2} < f, g >=< f, g >$ car $\dfrac{\varphi(g)}{\|g\|_2^2} = \dfrac{\overline{\varphi(h)}}{\|h\|_2^2} \times \varphi(h) \times \dfrac{\|h\|_2^4}{|\varphi(h)|^2\|h\|_2^2} = 1$.
On a donc bien l'existence d'une fonction g telle que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \varphi(f) = \int_X f\overline{g} d\mu =< f, g >$.
Supposons qu'il existe deux fonctions g et g' telles que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \varphi(f) =< f, g >=< f, g' >$. On a alors :

$$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), < f, g - g' >= 0$$

d'où $g - g' \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mu)^\perp$, *i.e* $g = g'$.
Finalement, il existe une unique fonction g telle que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mu), \varphi(f) = \int_X f\overline{g} d\mu$. □

3 Densité et dualité des espaces L^p

3.1 Les sous-espaces denses des espaces L^p

Les espaces L^p possèdent des sous-espaces denses remarquables. Nous allons en étudier quelques-uns dans cette partie.

Remarque 5. *Si φ est une fonction étagée alors elle est intégrable si et seulement si $\mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$ et alors $\varphi \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

On rappelle le lemme suivant, démontré dans le cours d'intégration :

Lemme 9. *Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Il existe une suite (f_n) de fonctions étagées telle que (f_n) converge simplement vers f sur X. De plus :*
(i) Si f est positive, on peut choisir (f_n) croissante avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$.
(ii) Si f est bornée, on peut choisir (f_n) de sorte que (f_n) converge uniformément vers f sur X.

Remarque 6. *On rappelle également que, si l'on est dans le cas (i), on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,k}} + n \mathbb{1}_{E_{n,\infty}}$$

avec $\forall k \in [\![0, n2^n - 1]\!]$, $E_{n,k} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right)$ et $E_{n,\infty} = f^{-1}([n, +\infty[)$.

Proposition 12. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.
f s'écrit comme combinaison linéaire de 4 fonctions de $L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$: $\mathfrak{Re}(f)^+$, $\mathfrak{Im}(f)^+$, $\mathfrak{Re}(f)^-$ et $\mathfrak{Im}(f)^-$.
Donc on travaille avec $f \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$. On a alors d'après le lemme 9 qu'il existe une suite de fonctions étagées positives $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissant vers f. On a donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)^{\mathbb{N}}$ car $|\varphi_n| \leqslant f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc par le théorème de convergence dominée, $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ car $|f - \varphi_n|^p \leqslant f^p$ et $f^p \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ car φ_n et f sont positives. $\square$

Définition 13. *Soit μ une mesure.*
μ est une mesure de Borel sur $(X, \mathscr{B}(X))$ si pour tout compact $K \subset X$, $\mu(K)$ est finie.

Lemme 10 (Urysohn)**.** *Soit (X,d) un espace métrique, O un ouvert et K un compact inclus dans O.*
On pose la fonction :

$$\rho_{O,K} : \left\{ \begin{array}{ccc} (X,d) & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \dfrac{d(x, O^C)}{d(x, O^C) + d(x, K)} \end{array} \right.$$

- Elle est bien définie et continue sur X.
- Elle vérifie :

$$\mathbb{1}_K \leqslant \rho_{O,K} \leqslant \mathbb{1}_O$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $d(x, O^C)+d(x, K) = 0$, donc $d(x, O^C) = 0$ et $d(x, K) = 0$, donc $x \in \overline{O^C} \cap \overline{K}$.
Or K est compact et O est ouvert, donc K et O^C sont fermés. Donc $x \in O^C \cap K$.
Or K⊂O, donc $x \in O^C \cap O$, ce qui est impossible.
Donc le dénominateur ne s'annule pas, d'où $\rho_{O,K}$ est bien définie. L'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne donc continue sur X, d'après le lemme 1. Donc $\rho_{O,K}$ est continue par somme et quotient de fonctions continues.
Soit $x \in K$,alors $d(x, O^C) \neq 0$ et $d(x, K) = 0$. Donc $\rho_{O,K}(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_K \leqslant \rho_{O,K}$.
Soit $x \in O^C$,alors $d(x, K) \neq 0$ et $d(x, O^C) = 0$. Donc $\rho_{O,K}(x) = 0$
Donc $\rho_{O,K} \leqslant \mathbb{1}_O$ car $\rho_{O,K} \leqslant 1$. □

Lemme 11. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\left|z' - \dfrac{z}{max(|z|^2, 1)}\right| \leqslant |z' - z|$ *avec* $|z'| = 1$.

Démonstration. En effet, cette inégalité est équivalente à : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left|1 - \dfrac{z}{max(|z|^2, 1)}\right| \leqslant |z-1|$ car $|z| = 1$ ssi $z' = e^{-i\theta}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|e^{i\theta} - \dfrac{z}{max(|z|^2, 1)}\right| \leqslant |e^{i\theta} - z|$ ssi pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\left|1 - \dfrac{e^{-i\theta} z}{max(|e^{-i\theta} z|^2, 1)}\right| \leqslant |e^{-i\theta} z - 1|$ ssi pour tout $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\left|1 - \dfrac{\tilde{z}}{max(|\tilde{z}|^2, 1)}\right| \leqslant |\tilde{z} - 1|$.
Puis soit $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \leqslant 1$, on a immédiatement l'inégalité.
Sinon $|z| > 1$, et montrons que $\left|1 - \dfrac{z}{|z|^2}\right| \leqslant |z - 1|$.
Or, on a $|\bar{z} - 1| = |z - 1| < |z||z - 1|$ car $|z| > 1$.
Donc $\left|\dfrac{\bar{z} - 1}{\bar{z}}\right| < |z - 1|$ *i.e* $\left|1 - \dfrac{1}{\bar{z}}\right| < |z - 1|$ donc $\left|1 - \dfrac{z}{|z|^2}\right| \leqslant |z - 1|$. □

Théorème 7 (Théorème de Lusin)**.** *Soit μ une mesure de Borel régulière sur un espace métrique (X,d) et $p \in [1, +\infty[$.*
Alors pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ telle que $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f\|_\infty$, $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leqslant \varepsilon$ et $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leqslant \varepsilon$.
Si $f \geqslant 0$, on peut choisir $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$.

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème étape par étape.
Etape 1 : Fonctions indicatrice de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$
Soit $A \in \mathscr{B}(X)$, $f = \mathbb{1}_A$.
Comme $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ si et seulement si $\mu(A) < +\infty$, on suppose $\mu(A) < +\infty$.
Si $\mu(A) = 0$ on pose $\varphi_\varepsilon = 0$ et on a le résultat.
Sinon $\mu(A) \neq 0$ et μ est régulière, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε et un ouvert O_ε tels que $K_\varepsilon \subset A \subset O_\varepsilon$ et $\mu(O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^p$, ie $\|\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \mathbb{1}_{K_\varepsilon}\|_p \leqslant \varepsilon$.
On pose $\varphi_\varepsilon = \rho_{O_\varepsilon, K_\varepsilon}$.
D'après le lemme d'Urysohn, $\varphi_\varepsilon \leqslant \mathbb{1}_{O_\varepsilon}$, et comme $\mu(O_\varepsilon) = \mu((O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \cup K_\varepsilon) \leqslant \mu(A)+\varepsilon^p < +\infty$, on a $\mathbb{1}_{O_\varepsilon} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, donc $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.
D'autre part, comme $\mathbb{1}_{K_\varepsilon} \leqslant \varphi_\varepsilon \leqslant \mathbb{1}_{O_\varepsilon}$ et $\mathbb{1}_{K_\varepsilon} \leqslant \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_{O_\varepsilon}$, on a $|\varphi_\varepsilon - \mathbb{1}_A| \leqslant |\mathbb{1}_{O_\varepsilon} - \mathbb{1}_{K_\varepsilon}|$ d'où $\|\varphi_\varepsilon - \mathbb{1}_A\|_p \leqslant \varepsilon$.
Or $\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \subset O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon$ car $f = \varphi_\varepsilon$ sur K_ε et $f = \varphi_\varepsilon$ sur ${}^cO_\varepsilon$ car $A \subset O_\varepsilon$, donc $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\}) \leqslant \mu(O_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^p$.
On peut supposer $\varepsilon \leqslant 1$ donc $\varepsilon^p \leqslant \varepsilon$.
Enfin, $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant 1 = \|\mathbb{1}_A\|_\infty = \|f\|_\infty$ car $\varphi_\varepsilon \leqslant \mathbb{1}_{O_\varepsilon}$ et $\mu(A) \neq 0$.

On a donc le résultat pour une fonction indicatrice de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Etape 2 : Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ à valeurs dans $]0,1]$

Soit $f : X \to]0,1]$ une fonction de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ strictement positive et vérifiant $\|f\|_\infty = 1$.

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leqslant \frac{k+1}{2^n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f>n\}} = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} < f \leqslant \frac{k+1}{2^n}\}}$ car f est à valeurs dans]0,1].

On a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ simplement d'après le lemme 9 et la remarque 6.

Si on pose $f_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, \varphi_n = 2^n(f_n - f_{n-1})$, alors on a $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\varphi_n}{2^n} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right) - f_0 = f$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que φ_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet, pour tout $k \in \{0, ..., 2^{n-1}-1\}$, sur $\{f_{n-1} = \frac{k}{2^{n-1}}\} = \{\frac{k}{2^{n-1}} < f \leqslant \frac{k+1}{2^{n-1}}\}$ (car f_{n-1} est une somme d'indicatrice sur des ensembles 2 à 2 disjoints), la fonction f_n ne peut prendre que les valeurs $\frac{2k}{2^n}$ et $\frac{2k+1}{2^n}$. Or si $f_n = \frac{2k}{2^n} = \frac{k}{2^{n-1}} = f_{n-1}$ alors $\varphi_n = 0$.

Sinon $f_n = \frac{2k+1}{2^n}$ et $\varphi_n = 1$ donc si on pose $A_n = \{\varphi_n = 1\}$, on a

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left\{\frac{2k+1}{2^n} < f \leqslant \frac{2(k+1)}{2^n}\right\}.$$

On a donc $\varphi_n = \mathbb{1}_{A_n}$ et $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n}$.

Comme $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\mathbb{1}_{A_n} \leqslant 2^n f$ (car $\frac{\mathbb{1}_{A_n}}{2^n} \leqslant \sum\limits_{n\leqslant 1} 2^{-n}\mathbb{1}_{A_n} = f$), on a $\varphi_n \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.

D'après l'étape 1, on a donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, qu'il existe pour tout $n \geqslant 1$, $\varphi_{n,\varepsilon} \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu) \cap \mathscr{C}(X, [0,1])$ tel que $\|\varphi_{n,\varepsilon} - \varphi_n\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \mu(\{\varphi_{n,\varepsilon} \neq \varphi_n\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ et $\|\varphi_{n,\varepsilon}\|_{sup} \leqslant \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$.

On pose alors $\varphi_\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_{n,\varepsilon}}{2^n}$. On a :

$$\|\varphi_\varepsilon - f\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_{n,\varepsilon} - \varphi_n}{2^n}\right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left\|\frac{\varphi_{n,\varepsilon} - \varphi_n}{2^n}\right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{2n}} = \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon$$

$\mu(\{\varphi_\varepsilon \neq f\}) = \mu(\{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_{n,\varepsilon}}{2^n} \neq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n}{2^n}\}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu(\{\varphi_{n,\varepsilon} \neq \varphi_n\}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

et $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\|\varphi_{n,\varepsilon}\|_{sup}}{2^n} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = \|f\|_\infty$.

Comme la convergence de la série définissant φ_ε est normale et que les $\varphi_{n,\varepsilon}$ sont continues, on a que φ_ε est continue.

On a donc le résultat pour les fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ à valeurs dans $]0,1]$.

Etape 3 : Fonctions de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ positives et μ-essentiellement bornées

Soit $f \in \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ positive, μ-essentiellement bornées, et $\delta \in]0, \|f\|_\infty[$.

On pose $f_\delta = \frac{f+\delta}{\|f\|_\infty + \delta}$. Comme f est positive, f_δ est à valeurs dans $]0,1]$ et $\|f_\delta\|_\infty = 1$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe d'après l'étape 2, $\varphi_{\delta,\varepsilon} \in \mathscr{C}(X, [0,1])$ tel que $\|\varphi_{\delta,\varepsilon} - f_\delta\|_p \leqslant \varepsilon', \mu(\{\varphi_{\delta,\varepsilon} \neq$

$f_\delta\}) \leqslant \varepsilon'$ et $\|\varphi_{\delta,\varepsilon}\|_{sup} \leqslant 1$ avec $\varepsilon' = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{\|f\|_\infty + \delta}\right\}$.
On pose $\tilde{\varphi}_\varepsilon = (\|f\|_\infty + \delta)\varphi_{\delta,\varepsilon} - \delta$ et $\varphi_\varepsilon = \max(\tilde{\varphi}_\varepsilon, 0)$.
On a :
$\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon$ car $\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \subset \{\tilde{\varphi}_\varepsilon \neq f\} = \{(\|f\|_\infty + \delta)\varphi_{\delta,\varepsilon} - \delta \neq f\} = \{\varphi_{\delta,\varepsilon} \neq f_\delta\}$,
$\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f\|_\infty$, et $\|\varphi_\varepsilon - f\|_p = \|\max(\tilde{\varphi}_\varepsilon, 0) - \max(f, 0)\|_p \leqslant \|\tilde{\varphi}_\varepsilon - f\|_p \leqslant \varepsilon$ car $x \mapsto \max(x, 0)$ est 1-lipschitzienne.

Etape 4 : Fonctions de $\mathscr{L}^p_\mathbb{R}(\mu)$ μ-essentiellement bornées de signe quelconque
On peut étendre le résultat de l'étape 3 à une fonction f μ-pp positive.
Si f est μ-essentiellement bornée, on peut appliquer l'étape 3 à $f + \|f\|_\infty \geqslant 0$ on a donc que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ continue tel que $\|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f + \|f\|_\infty\|_\infty$,
$\mu(\{f + \|f\|_\infty \neq \tilde{\varphi}_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon$ et $\|f + \|f\|_\infty - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_p \leqslant \varepsilon$.
On pose $\varphi_\varepsilon = \tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty$. φ_ε est continue et dans $\mathscr{L}^p_\mathbb{R}(\mu)$.
On a :

— $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\} = \mu(\{f \neq (\tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty)\} = \mu(\{f + \|f\|_\infty \neq \tilde{\varphi}_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon$
— $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p = \|f - (\tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty)\|_p = \|f + \|f\|_\infty - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_p \leqslant \varepsilon$
— Montrons que $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f\|_\infty$. On a $\tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty \leqslant \|\tilde{\varphi}_\varepsilon\|_{sup} - \|f\|_\infty \leqslant \|f + \|f\|_\infty\|_\infty - \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$
Donc $|\tilde{\varphi}_\varepsilon - \|f\|_\infty| \leqslant \|f\|_\infty$ $i.e$ $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f\|_\infty$

On a donc le résultat pour les fonctions de $\mathscr{L}^p_\mathbb{R}(\mu)$ essentiellement bornées de signe quelconque.

Etape 5 : Fonctions de $\mathscr{L}^p_\mathbb{R}(\mu)$
Soit $f \in \mathscr{L}^p_\mathbb{R}(\mu)$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$. On considère $f^{(A)} = f\mathbb{1}_{\{|f| \leqslant A\}}$ et A_ε tel que $\|f - f^{(A_\varepsilon)}\|_p \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On applique l'étape 4 à $f^{(A_\varepsilon)}$ et $\dfrac{\varepsilon}{2}$ sachant que $\{f \neq f^{(A_\varepsilon)}\} = \{|f| > A_\varepsilon\}$.

Etape 6 : Fonctions de $\mathscr{L}^p_\mathbb{C}(\mu)$
Soit $f \in \mathscr{L}^p_\mathbb{C}(\mu)$.
On pose $g = \dfrac{f}{|f|}\mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}$, de sorte que $f = |f|g$.
On a $g = g_1 + ig_2$. D'après l'étape 5, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, $\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}, \tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}$ relatives à g_1 et g_2 telles que $\|\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}\|_{sup} \leqslant \|g_1\|_\infty$, $\mu(\{g_1 \neq \tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}\}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\|g_1 - \tilde{\gamma}_{1,\varepsilon}\|_p \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
$\|\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}\|_{sup} \leqslant \|g_2\|_\infty$, $\mu(\{g_2 \neq \tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}\}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et $\|g_2 - \tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}\|_p \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On pose $\gamma_{i,\varepsilon} = \dfrac{\tilde{\gamma}_{i,\varepsilon}}{max(\tilde{\gamma}^2_{1,\varepsilon} + \tilde{\gamma}^2_{2,\varepsilon}, 1)}$ avec $i = 1$ ou 2.
Comme $|g| = 1$, on a $g_1^2 + g_2^2 = 1$.
On a pour $i = 1$ ou 2, $\{\gamma_{1,\varepsilon} \neq g_1\} \cup \{\gamma_{2,\varepsilon} \neq g_2\} \subset \{\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon} \neq g_1\} \cup \{\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon} \neq g_2\}$.
On définit alors $\gamma_\varepsilon = \gamma_{1,\varepsilon} + i\gamma_{2,\varepsilon}$.
Or pour tout $z, z' \in \mathbb{C}, |z'| = 1$, $\left|z' - \dfrac{z}{max(|z|^2, 1)}\right| \leqslant |z' - z|$, d'après le lemme 11 donc on obtient $\|g - \gamma_\varepsilon\|_p \leqslant g - (\tilde{\gamma}_{1,\varepsilon} - i\tilde{\gamma}_{2,\varepsilon}) \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
L'inégalité en norme $\|.\|_\infty$ est immédiate.
On pose alors, $\varepsilon > 0$ étant fixé, $\varepsilon' = min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2(1 + \|f\|_p)}\right)$.
Il existe une fonction $\psi_{\varepsilon'}$ continue tel que $\|\psi_{\varepsilon'}\|_{sup} \leqslant \||f|\|_\infty$, $\mu(\{|f| \neq \psi_{\varepsilon'}\} \leqslant \varepsilon'$ et $\||f| - \psi_{\varepsilon'}\|_p \leqslant$

ε'.
On note alors que $\varphi_\varepsilon = \psi'_\varepsilon \gamma'_\varepsilon$ vérifie le résultat du théorème.
Finalement, pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p_\mathbb{C}(\mu)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{L}^p_\mathbb{C}(\mu) \cap \mathscr{C}(X, \mathbb{C})$ tel que $\|\varphi_\varepsilon\|_{sup} \leqslant \|f\|_\infty$, $\mu(\{f \neq \varphi_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon$ et $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leqslant \varepsilon$. □

L'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ possède un sous-espace dense qu'un espace mesuré quelconque $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ne possède pas. C'est ce que nous allons montrer dans cette dernière proposition.

Proposition 13. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans tous les espaces $L^p_\mathbb{C}(\lambda_d)$, $1 \leqslant p < +\infty$.*

Démonstration. D'après la proposition 12, il suffit de montrer que pour tout $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue à support compact telle que $\|\phi - \mathbb{1}_E\|_p \leqslant \varepsilon$.
Soit $1 \leqslant p < +\infty$, $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure finie, $\varepsilon > 0$.
D'après la remarque 1 et la proposition 2, il existe F compact et O ouvert de $\mathbb{R}^d$ tels que $F \subset E \subset O$ et $\lambda_d(O \backslash F) \leqslant \varepsilon$. On note que $\lambda_d(O) \leqslant \varepsilon + \lambda_d(F) < +\infty$ $(*)$.
D'après le lemme d'Urysohn, il existe ϕ continue sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathbb{1}_F \leqslant \phi \leqslant \mathbb{1}_O$. On note que ϕ est à support compact d'après $(*)$ et qu'on a :

$$\mathbb{1}_F - \mathbb{1}_O \leqslant \mathbb{1}_F - \mathbb{1}_E \leqslant \phi - \mathbb{1}_E \leqslant \mathbb{1}_O - \mathbb{1}_F$$

D'où $|\phi - \mathbb{1}_E|^p \leqslant (\mathbb{1}_O - \mathbb{1}_F)^p = \mathbb{1}_O - \mathbb{1}_F$.
On a alors $\int_{\mathbb{R}^d} |\phi - \mathbb{1}_E|^p d\lambda_d \leqslant \varepsilon$ d'où $\|\phi - \mathbb{1}_E\|_p \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{p}}$.
Finalement, on a bien que l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans tous les espaces $L^p_\mathbb{C}(\lambda_d)$, $1 \leqslant p < +\infty$. □

3.2 La dualité des espaces L^p

Nous allons nous intéresser maintenant à la dualité des espaces L^p.
Pour commencer, nous allons avoir besoin du théorème suivant que nous admettrons :

Théorème 8 (Radon-Nikodym, finie)**.** *Soit μ, ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$. Alors :*

$$(\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0) \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mu); \forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$$

De plus, la fonction f est unique dans $L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$.

Ce théorème peut se généraliser à des mesures σ-finies :

Théorème 9 (Radon-Nikodym, σ-finie)**.** *Soit μ, ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Alors :*

$$(\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0) \Leftrightarrow \exists f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^+ \textit{ mesurable};\ \forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$$

De plus, la fonction f est unique, à égalité μ-pp près.

Démonstration. Seul le sens direct nécessite une démonstration. On suppose donc que $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.
Pour démontrer ce théorème, nous allons nous ramener au cas des mesures finies afin d'utiliser le théorème 8.
Commençons par montrer l'existence d'une telle fonction f.
Les mesures μ et ν étant σ-finies, il existe deux partitions de X : $(F_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $(G_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(F_n) + \nu(G_n) < +\infty$.
On note que $(E_{k,l}) := (F_k \cap G_l) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ forme une partition de X vérifiant :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \mu(E_{k,l}) \leqslant \mu(F_k) < +\infty, \nu(E_{k,l}) \leqslant \nu(G_l) < +\infty.$$

Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable infini donc on peut supposer que les ensembles $(E_{k,l})$ sont indicés par $\mathbb{N}$. On les notera donc $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n := \mu(. \cap E_n)$ et $\nu_n := \nu(. \cap E_n)$. Ces mesures sont finies donc, d'après le théorème 8, il existe une suite de fonctions $(f_n) \in (\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mu_n))^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n = f_n.\mu_n = (f_n \mathbb{1}_{E_n}).\mu$.
On pose alors $f := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathbb{1}_{E_n}$. D'après le théorème de Beppo-Levi, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_A f d\mu &= \int_X \mathbb{1}_A \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \mathbb{1}_A f_n d\mu_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A \cap E_n) = \nu(A)
\end{aligned}$$

D'où $\nu = f.\mu$.
Montrons que f est unique à égalité μ-pp près.
Supposons que f et $\tilde{f}$ soient mesurables et telles que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_A \tilde{f} d\mu.$$

On a alors :

$$\nu(\{f > \tilde{f}\}) = \int_{\{f>\tilde{f}\}} f d\mu = \int_{\{f>\tilde{f}\}} \tilde{f} d\mu$$

donc $\int_{\{f>\tilde{f}\}} (f - \tilde{f}) d\mu = 0$ d'où $\mu(\{f > \tilde{f}\}) = 0$ et par symétrie, $\mu(\{f < \tilde{f}\}) = 0$.
On en déduit que $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$ *i.e* $f = \tilde{f}$ μ-pp.
On obtient donc bien qu'il existe une unique fonction $f \in L^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ telle que $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f d\mu$. □

Théorème 10 (Dualité positive)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1; +\infty[$ et q son exposant conjugué.*
Soit $\Phi : \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue positive. Alors :

$$\exists! g \in \mathsf{L}^q_{\mathbb{R}}(\mu); \forall f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu), \Phi(f) = \int_X fg d\mu$$

En outre, $\|g\|_q = \|\Phi\|$ où $\|\Phi\|$ désigne la norme de Φ.

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.
Il existe $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < +\infty$.
On pose $F_0 = E_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = E_n \backslash E_{n-1}$.

Étape 1 : construction de g
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{A}$, on pose $\nu_n(A) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n})$
Montrons que si $n \in \mathbb{N}$, ν_n est une mesure finie et qui vérifie : $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu_n(A) = 0$.
· ν_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car Φ est positive.
· $\nu_n(\emptyset) = 0$
· $\nu_n(X) = \Phi(\mathbb{1}_{F_n}) \leqslant \|\Phi\| \|\mathbb{1}_{F_n}\|_p \leqslant \|\Phi\| \mu(F_n)^{1/p} < +\infty$.
· Soit $(A_k) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, 2 à 2 disjoints,

$$\nu_n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \Phi(\mathbb{1}_{(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k)\cap F_n}) = \Phi(\mathbb{1}_{\cup_{k\in\mathbb{N}}(A_k\cap F_n)}) = \Phi(\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \mathbb{1}_{A_i\cap F_n})$$

La dernière égalité vient du fait que les A_k sont disjoints, donc les sous-ensembles des A_k le sont aussi.
Par continuité et linéarité de Φ :

$$\nu_n(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \Phi(\mathbb{1}_{A_i\cap F_n}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Phi(\mathbb{1}_{A_i\cap F_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_n(A_k)$$

Si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\mu(A) = 0$, on a :

$$\nu_n(A) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n}) \leqslant \|\Phi\| \|\mathbb{1}_{A\cap F_n}\|_p = \|\Phi\| (\mu(A\cap F_n))^{1/p} \leqslant \|\Phi\| \mu(A)^{1/p} = 0$$

Donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures σ-finies :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,, il existe $g_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^+$ mesurable, telle que $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu_n(A) = \int_A g_n d\mu$.
De plus, $\int_X g_n d\mu = \nu_n(X) < +\infty$ car ν_n est finie donc $g_n \in \mathsf{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$. De plus, on a :

$$\nu_n(A) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n}) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n\cap F_n}) = \nu_n(A\cap F_n)$$

donc on peut remplacer g_n par $g_n \mathbb{1}_{F_n}$ et g_n est alors nulle en dehors de F_n.

Étape 2 : propriété de représentation
Les F_n étant deux à deux disjoints et sachant que g_n est nulle en dehors de F_n, on a donc $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n$ qui convient.
Soit $f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$.
La série de fonctions positives $\sum f\mathbb{1}_{F_n}$ converge vers f (car $X = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$).
De même, $\sum (f\mathbb{1}_{F_n})^p$ converge vers f^p.
On sait par le lemme fondamental qu'il existe une suite de fonctions étagées positives qui converge vers f, notée $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Comme ϕ est continue et linéaire, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &= \Phi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f\mathbb{1}_{F_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi(f\mathbb{1}_{F_n}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} \Phi(f_m\mathbb{1}_{F_n}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} \sum_{\alpha\in f_m(X)} \alpha\nu_n(\{f_m=\alpha\}\cap F_n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} \sum_{\alpha\in f_m(X)} \alpha\int_X \mathbb{1}_{\{f_m=\alpha\}} g_n d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} \int_X f_m g_n d\mu \overset{BL}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f g_n d\mu \\
&= \int_X fg d\mu
\end{aligned}$$

Soit maintenant $f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$. Comme $f = f^+ - f^-$, en appliquant ce qui précède à f^+ et f^-, on obtient :

$$\forall f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu), \Phi(f) = \int_X fg d\mu$$

Étape 3 : Égalité des normes :
Supposons $p > 1$.
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,m} = sign(g)|g|^{q-1}\mathbb{1}_{\{g\leqslant m\}\cap E_n}$.
Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. On a : $|f_{n,m}|^p \leqslant |g|^{(q-1)p}\mathbb{1}_{E_n\cap\{g\leqslant m\}} = |g|^q\mathbb{1}_{E_n\cap\{g\leqslant m\}} \leqslant |m|^q\mathbb{1}_{E_n}$ d'où $f_{n,m} \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$.
D'après l'étape 2, on a :

$$\int_{E_n} |g|^q\mathbb{1}_{\{g\leqslant m\}} d\mu = \Phi(f_{n,m}) \leqslant \|\Phi\|\|f_{n,m}\|_p = \|\Phi\|\left(\int_{E_n} |g|^q\mathbb{1}_{\{g\leqslant m\}} d\mu\right)^{1/p} < +\infty$$

D'où :
$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\left(\int_{E_n} |g|^q\mathbb{1}_{\{g\leqslant m\}} d\mu\right)^{1-1/p} \leqslant \|\Phi\|$
D'après le théorème de Beppo-Levi sur m puis sur n, comme $1-1/p = 1/q$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|$ puis $\left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|$.
On a donc $g \in \mathsf{L}^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\|g\|_q \leqslant \|\Phi\|$.
D'après l'inégalité de Hölder, si $f \in \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, $|\Phi(f)| \leqslant \|g\|_q\|f\|_p$ d'où $\|\Phi\| \leqslant \|g\|_q$.
D'où $\|g\|_q = \|\Phi\|$.
Si $p = 1$, on reprend la même démonstration avec $p' = \dfrac{r}{r-1}$, $r > 1$ et $q = r$.
On constate alors que $\forall r > 1$, $\|g\|_r \leqslant \|\Phi\|$ d'où $\|g\|_\infty \leqslant \|\Phi\| < +\infty$.
L'autre inégalité découle de l'inégalité de Hölder.

Étape 4 : Unicité Soit g' une autre fonction qui convient :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}, \nu_n(A) = \Phi(\mathbb{1}_{A\cap F_n}) = \int_A g'\mathbb{1}_{F_n} d\mu$$

L'unicité du théorème de Radon-Nikodym assure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g'\mathbb{1}_{F_n} = g\mathbb{1}_{F_n}$ μ-pp.
D'où $g = g'$ μ-pp. $\square$

Pour exhiber le dual des espaces $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$, nous devons généraliser le théorème précédent et allons avoir besoin du théorème suivant :

Théorème 11. *Soit Y un ensemble non vide. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(Y, \mathbb{R})$ normé et de norme $\|.\|$. On note E^+ le cône des fonctions positives appartenant à E.*
On suppose de plus que E vérifie :
(i) E est stable par valeur absolue, $\forall f \in E$, $|f| \in E^+$ et $\||f|\| = \|f\|$
(ii) $\|.\|$ est croissante, $\forall (f, g) \in E^+ \times E^+$, $f \leqslant g \Rightarrow \|f\| \leqslant \|g\|$
Soit Φ une forme linéaire réelle continue sur E.
Alors :
Φ se décompose sous la forme $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ avec Φ^+ et Φ^- des formes linéaires, continues, positives. Elles sont définies par :
Soit $f \in E^+$,
$\Phi^+(f) = \sup\{\Phi(\varphi),\ \varphi \in E^+,\ \varphi \leqslant f\}$
$\Phi^-(f) = -\inf\{\Phi(\varphi),\ \varphi \in E^+,\ \varphi \leqslant f\}$

Démonstration. Soit Φ l'application définie sur $E_+ = \{f \in E, f \geqslant 0\}$
Étape 1 : Φ^+ est positive et finie sur E_+ :
Soit $f \in E_+$. Comme $0 \in E_+$, $\Phi^+(f) \geqslant 0$. Soit $\varphi \in E_+$ telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Par continuité de la fonction Φ et par croissance de la norme, on a $\Phi(\varphi) \leqslant \|\Phi\|\|\varphi\| \leqslant \|\Phi\|\|f\|$, Par passage au sup :

$$0 \leqslant \Phi^+(f) \leqslant \|\Phi\|\|f\| < +\infty$$

Étape 2 : Φ^+ est additive sur E_+ : Soit $f, g, \varphi \in E^+$ telle que $\varphi \leqslant f + g$. On écrit $\varphi = min(f, \varphi) + max(\varphi - f, 0)$.
On a donc $min(f, \varphi) \leqslant f$ et $max(\varphi - f, 0) \leqslant g$ et $min(f, \varphi), max(\varphi - f, 0) \in E^+$.
On a par linéarité de Φ et par définition de Φ^+ :

$$\Phi(\varphi) \leqslant \Phi(min(f, \varphi)) + \Phi(max(\varphi - f, 0)) \leqslant \Phi^+(f) + \Phi^+(g)$$

Par passage au sup :

$$\Phi^+(f + g) \leqslant \Phi^+(f) + \Phi^+(g)$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_f, \varphi_g \in E^+$ telle que $\varphi_f \leqslant f$, $\varphi_g \leqslant g$ et $\Phi^+(f) \leqslant \Phi(\varphi_f) + \varepsilon$, $\Phi^+(g) \leqslant \Phi(\varphi_g) + \varepsilon$.
Or $0 \leqslant \varphi_f + \varphi_g \leqslant f + g$:

$$\Phi^+(f + g) \geqslant \Phi(\varphi_f + \varphi_g) = \Phi(\varphi_f) + \Phi(\varphi_g) \geqslant \Phi^+(f) + \Phi^+(g) - 2\varepsilon$$

On a donc $\Phi^+(f + g) \geqslant \Phi^+(f) + \Phi^+(g)$.
Ainsi $\Phi^+(f + g) = \Phi^+(f) + \Phi^+(g)$
Étape 3 : définition et additivité de Φ^+ sur E :
Soit $f \in E$, on a $f^{\pm} = \dfrac{1}{2}(|f| \pm f) = max(\pm f, 0) \in E^+$, on pose donc $\Phi^+(f) = \Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-)$.
Soient $f, g \in E$ on peut décomposer $f + g$ comme :

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

Donc $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$
Par l'additivité de Φ^+ sur E^+ :

$$\Phi^+((f+g)^+) + \Phi^+(f^-) + \Phi^+(g^-) = \Phi^+((f+g)^-) + \Phi^+(f^+) + \Phi^+(g^+)$$

On a alors :

$$\Phi^+(f)+\Phi^+(g) = \Phi^+(f^+)-\Phi^+(f^-)+\Phi^+(g^+)-\Phi^+(g^-) = \Phi^+((f+g)^+)-\Phi^+((f+g)^-) = \Phi^+(f+g)$$

Étape 4 : continuité sur E :
Soit $f \in E$, comme Φ^+ est positive, on a alors $\Phi^+(|f| \pm f) \geqslant 0$, par additivité $\Phi^+(|f|) \geqslant \pm\Phi^+(f)$ (donc $|\Phi^+(f)| \leqslant \Phi^+(|f|)$).
D'autre part, on a $(-f)^\pm = f^\mp$ et donc $\Phi^+(-f) = -\Phi^+(f)$.
Soient $f, g \in E$, par l'additivité et la majoration vu dans l'étape 1 :

$$|\Phi^+(f) - \Phi^+(g)| = |\Phi^+(f-g)| \leqslant \Phi^+(|f-g|) \leqslant \|\Phi\|\||f-g|\| = \|\Phi\|\|f-g\|$$

D'où la continuité de Φ^+.
Étape 5 : linéarité sur E. Soit $f \in E$, comme $\Phi^+(-f) = -\Phi^+(f)$ et par additivité de Φ^+, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi^+(nf) = n\Phi^+(f)$.
Soit $a \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$ tels que $a = \frac{p}{q}$:

$$\Phi^+(qaf) = q\Phi^+(af) = \Phi^+(pf) = p\Phi^+(f)$$

On a donc $\Phi^+(af) = a\Phi^+(f)$. Par continuité de f et pas densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi^+(\lambda f) = \lambda\Phi^+(f)$. Avec l'additivité de l'étape 4, Φ^+ est donc une forme linéaire de sur E.
Étape 6 : caractérisation
On définit Φ^- par : Soit $f \in E$,

$$\begin{aligned}\Phi^-(f) = \Phi^+(f) - \Phi(f) &= sup\{\Phi(\psi - f), \psi \in E^+, \psi \leqslant f\} = sup\{-\Phi(\varphi), \varphi \in E^+, \varphi \leqslant f\} \\ &= -inf\{\Phi(\varphi), \varphi \in E^+, \varphi \leqslant f\}\end{aligned}$$

Soit Φ_1 et Φ_2 deux formes linéaires positives sur E telles que $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. Soient $f \in E$ et $\varphi \in E$ telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. par positivité de Φ_1 et Φ_2, on a $\Phi_1(f) \geqslant \Phi_1(\varphi) = \Phi(\varphi) + \Phi_2 \geqslant \Phi(f)$, en passant au sup, $\Phi_1(f) \geqslant \Phi^+(f)$. On en déduit que $\Phi_2 = \Phi(f) - \Phi_1(f) \leqslant \Phi(f) - \Phi^+ = \Phi^-(f)$. □

Remarque 7. *$(\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R}), \|.\|_{sup})$ et $(\mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu), \|.\|_p)$ avec $p \in [1; +\infty[$ vérifient les hypothèses du théorème précédent.*

Théorème 12. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1; +\infty[$ et q son exposant conjugué. Le dual topologique de $\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $\mathsf{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

Démonstration. On pose $\Psi : \left\{\begin{array}{lll} L^q_{\mathbb{C}}(\mu) & \to & (L^p_{\mathbb{C}}(\mu))^* \\ g & \mapsto & \Psi_g : \left\{\begin{array}{lll} L^p_{\mathbb{C}}(\mu) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_X fg d\mu \end{array}\right. \end{array}\right.$
Montrons que Ψ est une isométrie linéaire surjective.
Ψ est bien définie d'après l'inégalité de Hölder et par linéarité de l'intégrale. Toujours par linéarité de l'intégrale, Ψ est linéaire.
Soit $\Phi : \mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. $\Phi = \mathfrak{Re}(\Phi_{|L^p_{\mathbb{R}}(\mu)}) + i\mathfrak{Im}(\Phi_{|L^p_{\mathbb{R}}(\mu)}) + \mathfrak{Re}(\Phi_{|iL^p_{\mathbb{R}}(\mu)}) + i\mathfrak{Im}(\Phi_{|iL^p_{\mathbb{R}}(\mu)})$.

On peut donc se ramener au cas où $\Phi : \mathsf{L}^p_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$.
Avec le théorème, on a alors comme Φ est une forme linéaire réelle continue et que $(L^p_{\mathbb{R}}(\mu), \|.\|_p)$ vérifie les hypothèses du théorème 11, Φ se décompose sous la forme $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, avec Φ^+ et Φ^- des formes linéaires continues positives. On a alors l'existence de deux fonctions $g_1, g_2 \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ associées à Φ^+, Φ^- comme dans le lemme 10. On note alors que la fonction $g = g_1 - g_2 \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ est telle que :

$$\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), \Phi(f) = \int_X fg d\mu.$$

Donc Ψ est surjective. Il reste à montrer que c'est une isométrie.
D'après l'inégalité de Hölder :

$$\|\Psi_g\| \leqslant \|g\|_q$$

et on montre l'égalité avec $f_g = \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}} sign(g)|g|^{q-1}$.
Ψ est alors une isométrie linéaire surjective d'où le dual topologique de $\mathsf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $\mathsf{L}^q_{\mathbb{C}}(\mu)$. $\square$

Nous en déduisons le résultat suivant :

Corollaire 3 (Inégalité de Minkowski intégrale). *Soit* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ *des espaces mesurés σ-finis. Soit F mesurable sur* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *avec $q \in [1, +\infty[$ telle que*

$$F(x, .) \in L^q_{\mathbb{C}}(\mu_2)$$

pour μ_1-presque tout $x \in \Omega_1$ et

$$x \to \|F(x, .)\|_q \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu_1).$$

Alors

$$F(., y) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu_1)$$

pour μ_2-presque tout $y \in \Omega_2$ et

$$y \to \|F(., y)\|_1 \in L^q_{\mathbb{C}}(\mu_2)$$

avec

$$\left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |F(x, y)| d\mu_1(x) \right)^q d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |F(x, y)|^q d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} d\mu_1(x)$$

Démonstration. On note p l'exposant conjugué de q.

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|F(x,y)|d\mu_1(x)\right)^q d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|\int_{\Omega_1}|F(x,.)|d\mu_1(x)\right\|_q \\
&= \sup\left\{\left|\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|F(x,y)|d\mu_1(x)g(y)\right)d\mu_2(y)\right|, g\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu_2), \|g\|_p = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\int_{\Omega_2}\left|\int_{\Omega_1}|F(x,y)|d\mu_1(x)g(y)\right|d\mu_2(y), g\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu_2), \|g\|_p = 1\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{\int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1}|F(x,y)g(y)|d\mu_1(x)d\mu_2(y), g\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu_2), \|g\|_p = 1\right\} \\
&\leqslant \sup\left\{\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}|F(x,y)g(y)|d\mu_2(y)d\mu_1(x), g\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu_2), \|g\|_p = 1\right\} \text{ par Fubini-Tonelli} \\
&\leqslant \sup\left\{\int_{\Omega_1}\|F(x,.)\|_q\|g\|_p d\mu_1(x), g\in L^p_{\mathbb{C}}(\mu_2), \|g\|_p = 1\right\} \text{ d'après l'inégalité de Hölder} \\
&\leqslant \int_{\Omega_1}\|F(x,.)\|_q d\mu_1(x) = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}|F(x,y)|^q d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{q}} d\mu_1(x)
\end{aligned}$$

On obtient donc bien l'inégalité de Minkowski intégrale. □

4 Convolution sur $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$

Avant de définir le produit de convolution, nous allons avoir besoin des quelques résultats, énoncés ci-dessous.

4.1 Préliminaires

Théorème 13 (Fubini-Tonelli)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, $f : (X \times Y, \mathcal{A}\otimes\mathscr{B}) \to (\overline{\mathbb{R}^+}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}^+}))$ une fonction mesurable positive.*

$$(a) \text{ Les fonctions } x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y) \text{ et } y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

sont définies sur X et Y et elles sont $\mathcal{A}$ et $\mathscr{B}$-mesurables.

$$(b) \quad \int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

(Ces égalités ont lieu dans $\overline{\mathbb{R}^+}$).

Théorème 14 (Fubini)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu\otimes\nu)$.*

$$(a) \quad \begin{cases} \text{Pour } \mu\text{-presque tout } x\in X & y \mapsto f(x,y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\nu) \\ \text{Pour } \nu\text{-presque tout } y\in Y & x \mapsto f(x,y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad &\text{La fonction définie } \mu\text{-pp } x \mapsto \textstyle\int_Y f(x,y)d\nu(y) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \\ &\text{La fonction définie } \nu\text{-pp } y \mapsto \textstyle\int_X f(x,y)d\mu(x) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\nu)\end{aligned}$$

$$(c) \quad \int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On travaille désormais dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(R^d), \lambda_d)$.

Théorème 15. *Soit* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, $x \in \mathbb{R}^d$.
Pour toute $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, *on pose* $h_x : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & h(t-x) \end{array} \right.$.
L'application $\tau_f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^d & \to & L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d) \\ x & \mapsto & f_x \end{array} \right.$ *est uniformément continue.*

Démonstration. On veut montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2, \|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \leqslant \delta \Rightarrow \|f_x - f_y\|_p \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 13, il existe $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue à support compact telle que $\|f-g\|_p \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Il existe alors $(a_1, \ldots, a_d) \in (\mathbb{R}^{+*})^d$ tel que $supp(g) \subset [-a_1, a_1] \times \ldots \times [-a_d, a_d]$. D'après le théorème de Heine, toute fonction continue à support compact est uniformément continue donc il existe $\delta \in]0, C]$, avec $C = \max\{a_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2, \|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(2^{2d}C^d)^{\frac{1}{p}}}$$

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ tel que $\|x-y\|_{\mathbb{R}^d} \leqslant \delta$. On a, en faisant le changement de variable $u = t - x$:

$$\begin{aligned}
\int_{R^d} |g(t-x) - g(t-y)|^p d\lambda_d(t) &= \int_{R^d} |g(u) - g(u+x-y)|^p d\lambda_d(u) \\
&= \int_{[-a_1-\delta, a_1+\delta] \times \ldots \times [-a_d-\delta, a_d+\delta]} |g(u) - g(u+x-y)|^p d\lambda_d(u) \\
&\leqslant 2^d \prod_{i=1}^d (a_i + \delta) \frac{\varepsilon^p}{3^p 2^{2d} C^d} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^p}{3^p}
\end{aligned}$$

D'où $\|g_x - g_y\|_p \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
De plus, comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on sait que pour toute $h \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, $h_z \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et $\|h_z\|_p = \|h\|_p$.
Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_x - f_y\|_p &\leqslant \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|g_y - f_y\|_p \\
&\leqslant \|(f-g)_x\|_p + \|(g-f)_y\|_p + \|g_x - g_y\|_p \\
&\leqslant 2\|f-g\|_p + \|g_x - g_y\|_p \\
&\leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

d'où τ_f est bien uniformément continue. $\square$

4.2 Le produit de convolution

Le produit de convolution n'est pas défini que pour les fonctions positives mais nous allons commencer par voir le cas des fonctions positives car certaines propriétés ne sont vraies que dans ce cas. De plus, ces résultats nous serviront lorsque nous généraliserons le produit de convolution à des fonctions qui ne seront plus forcément positives.

Définition 14. *Soit f, g deux fonctions boréliennes positives de $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathbb{R}^+$. La convolée de f et g, notée $f * g$, est définie par :*
$f * g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)d\lambda_d(y) \end{array} \right.$.

Proposition 14. *(a) La fonction $f * g$ est bien définie. C'est une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * g)d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda_d\right)$$

(b) La convolution entre fonctions boréliennes positives est :
- commutative : $\forall f, g,\ f * g = g * f$
- associative : $\forall f, g, h,\ (f * g) * h = f * (g * h)$
(c) $\forall f, g,\ \{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$

Démonstration. Commençons par le point (a).
Montrons que $\varphi : \left\{ \begin{array}{lll} (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) & \to & (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)) \\ (x,y) & \mapsto & f(x-y)g(y) \end{array} \right.$ est mesurable.
Les fonctions $\left\{ \begin{array}{lll} (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) & \to & (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)) \\ (x,y) & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et
$\left\{ \begin{array}{lll} (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) & \to & (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)) \\ (x,y) & \mapsto & g(x) \end{array} \right.$ sont mesurables car f,g et les projections le sont.
De plus,$(x,y) \mapsto (x-y, y)$ est continue donc $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ mesurable.
D'où φ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.
D'après le théorème de Fubini, on sait alors que $f * g$ est partout définie, $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{R}^+))$-mesurable et que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (f * g)d\lambda_d &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)d\lambda_d(x)\right) d\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)d\lambda_d(x)\right) d\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d\right) d\lambda_d(y) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda_d\right)
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)d\lambda_d(y) \overset{y=x-u}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(u)g(x-u)d\lambda_d(u) = (g * f)(x)$

$$\begin{aligned}
\bullet((f*g)*h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x-y)h(y)d\lambda_d(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y-z)g(z)d\lambda_d(z)\right)h(y)d\lambda_d(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)g(u-y)d\lambda_d(u)\right)h(y)d\lambda_d(y) \text{ où l'on a posé u=y+z}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u-y)h(y)d\lambda_d(y)\right)d\lambda_d(u) \text{ par Fubini-Tonelli}\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)(g*h)(u)d\lambda_d(u)\\
&= (f*(g*h))(x)
\end{aligned}$$

(c) Si $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, comme $x = (x-y)+y$, $f(x-y) = 0$ ou $g(y) = 0$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $f(x-y)g(y) = 0$, d'où $(f*g)(x) = 0$. □

Remarque 8. *Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$.*
On montre de la même manière que précédemment que la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est $(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathscr{B}(\mathbb{C}))$-mesurable.
De plus, on note que : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d) \Leftrightarrow |f|*|g|(x) < +\infty$.
On peut alors définir la quantité $f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)d\lambda_d(y)$.

Définition 15. *La quantité $f*g$ s'appelle la convolée de f et g.*

Théorème 16. *Si $(f,g) \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)^2$, alors :*
- *pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f*g)(x)$ existe ;*
- *$f*g \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$;*
- *$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.*

Démonstration. $h : (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est mesurable et, grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et au théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|d\lambda_d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|d\lambda_d(x)\right)|g(y)|d\lambda_d(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\|f\|_1|g|d\lambda_d\\
&= \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

Donc pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)g(t)|d\lambda_d(t) < +\infty$, d'où, pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f*g)(x)$ existe et est intégrable.
De plus, on a $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. □

Théorème 17. *Soit $p \in]1,+\infty[$, $(f,g) \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)\times L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. On a :*
- *pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ i.e $(f*g)(x)$ existe ;*
- *$f*g \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$;*
- *$\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$.*

Démonstration. On note q l'exposant conjugué de p.
D'après le théorème précédent, on sait que pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto |f(x-t)||g(t)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
Donc, pour λ_d-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h : t \mapsto |f(x-t)|^{1/p}|g(t)| \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $h \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ on a :
$y \mapsto |f(x-y)|^{1/q} \in L^q_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$
D'après l'inégalité de Hölder, on a alors :

$$y \mapsto |f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)||f(x-y)|^{1/q} \in L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$$

et :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\lambda_d(y) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^p d\lambda_d\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|d\lambda_d\right)^{1/q}$$

Donc $|(f*g)(x)| \leqslant (|f|*|g|^p(x))^{1/p}\|f\|_1^{1/q}$ donc $|(f*g)(x)|^p \leqslant (|f|*|g|^p(x))\|f\|_1^{p/q}$ d'où $f*g \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et $\|f*g\|_p^p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p^p\|f\|_1^{p/q}$.
Finalement $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1^{1/p}\|f\|_1^{1/q}\|g\|_p = \|f\|_1\|g\|_p$ □

Théorème 18. *Soit $1 < p < +\infty$ et q son exposant conjugué.*
Si $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ et $g \in L^q_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la quantité $(f*g)(x)$ existe, la fonction $f*g$ est bornée et $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. D'après l'inégalité de Hölder, comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|d\lambda_d(y) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p d\lambda_d(y)\right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q \leqslant \|f\|_p\|g\|_q < +\infty$$

Donc $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}^d$, bornée et $\|f*g\|_\infty \leqslant \sup\{|(f*g)(x)|, x \in \mathbb{R}^d\} \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$. □

Définition 16. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$. On dit que f appartient à $L^1_{loc}(X)$ ssi f est intégrable sur tout compact de X.*

Proposition 15. *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Alors $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $(f*g)(x)$ est bien définie.
Montrons que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on pose $F_n(y) = f(x_n-y)g(y)$. En posant, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $F(y) = f(x-y)g(y)$, on a alors, par continuité de f, que $F_n \to F$ λ_d-pp.
Soit $K \subset X$ un compact tel que $(x_n - supp(f)) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a, pour tout $y \notin K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n-y) = 0$ et donc, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(y)| \leqslant \|f\|_\infty \mathbb{1}_K(y)|g(y)|$. Or $y \mapsto \|f\|_\infty \mathbb{1}_K(y)|g(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ car $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}(f*g)(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} F_n(y)d\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} F(y)d\lambda_d(y) = (f*g)(x)$$

Donc $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. □

Remarque 9. *On note pour* $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$*,* $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}\right)$ *et pour* $\alpha \in \mathbb{N}^d$ *avec* $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_d)$*,* $D^\alpha = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, ..., \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}\right)$.

Proposition 16. *Soit* $k \in \mathbb{N}$*,* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ *tel que* $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \leqslant k$*. Alors* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ *et* $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$*.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il suffit de le montrer pour $k \geqslant 1$.De plus, on peut se ramener par récurrence au cas $k = 1$. On suppose donc que $k = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Montrons que $f * g$ est différentiable en x et $\nabla(f * g)(x) = (\nabla f * g)(x)$.
Soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|h\|_{\mathbb{R}^d} < 1$. On a ,pour tout $y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}|f(x-y+h) - f(x-y) - \nabla f(x-y)h| &= \left|\int_{[0,1]} (\nabla f(x-y+sh)h - \nabla f(x-y)h) d\lambda_d(s)\right| \\ &\leqslant \|h\|_{\mathbb{R}^d} \varepsilon(\|h\|_{\mathbb{R}^d})\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(\|h\|_{\mathbb{R}^d}) \xrightarrow[\|h\|_{\mathbb{R}^d} \to 0]{} 0$ puisque, comme $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, ∇f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, car f est à support compact donc ∇f aussi.
De plus, il existe K un compact tel que $x + B(0,1) - supp(f) \subset K$.
On a $f(x-y+h) - f(x-y) - \nabla f(x-y)h = 0$ pour tout $y \notin K$, pour tout $h \in B(0,1)$ car $supp(\nabla f) \subset supp(f)$ et donc $|f(x-y+h) - f(x-y) - \nabla f(x-y)h| \leqslant \|h\|_{\mathbb{R}^d} \varepsilon(\|h\|_{\mathbb{R}^d}) \mathbb{1}_K(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, pour tout $h \in B(0,1)$.
Par conséquent (en multipliant par $|g(y)|$ et en intégrant),

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x) - (\nabla f * g)(x)h| \leqslant \|h\|_{\mathbb{R}^d} \varepsilon(\|h\|_{\mathbb{R}^d}) \int_K |g(y)| d\lambda_d(y)$$

Donc $f * g$ est différentiable en x et $\nabla(f * g)(x) = (\nabla f * g)(x)$. □

4.3 Suites régularisantes

La loi $*$ n'ayant pas d'unité, nous allons introduire la notion de suites régularisantes afin de pallier à cette absence.

Définition 17. *On appelle suite régularisante toute suite* $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ *de fonctions de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\rho_n \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *;*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, Supp* $\rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$ *;*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda_d = 1$ *;*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\rho_n \geqslant 0$*.*

Soit $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ une suite régularisante.

Proposition 17. *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^d)$*. Alors* $(\rho_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact de* $\mathbb{R}^d$*.*

Démonstration. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact. On a alors f uniformément continue sur K, car f est continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ \ |x-y-x| < \alpha \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

que l'on peut réécrire :

$$\forall x \in K,\ \ \forall y \in B(0,\alpha),\ \ |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in K$:

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)d\lambda_d - f(x)\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)d\lambda_d(y)$$
$$= \int_{B(0,\frac{1}{n})} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)d\lambda_d(y)$$

D'où pour $n > \dfrac{1}{\alpha}, x \in K$:

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = \varepsilon$$ □

Théorème 19. *Soit $f \in L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors $(\rho_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. $C_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ donc il existe $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$.
De plus, il existe K compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Supp(\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0,\frac{1}{n})} + Supp(f_1) \subset K$ donc, avec la propriété précédente et le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\rho_n * f_1 - f_1\|_p = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\rho_n * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f_1(x-y) + f_1(x-y))\rho_n(y)d\lambda_d(y) - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f_1(x-y))\rho_n(y)d\lambda_d(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)\rho_n(y)d\lambda_d(y) - f(x)\\ &= \rho_n * (f - f_1)(x) + (\rho_n * f_1 - f_1)(x) + (f_1 - f)(x)\end{aligned}$$

et on a vu que $\|\rho_n * (f - f_1)\|_p \leqslant \|\rho_n\|_1 \|f - f_1\|_p = \|f - f_1\|_p$ donc :

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leqslant 2\|f - f_1\|_p + \|\rho_n * f_1 - f_1\|_p$$

On a ainsi :

$$\limsup \|\rho_n * f - f\|_p \leqslant 2\varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\rho_n * f - f\|_p = 0$$ □

Corollaire 4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p < \infty$. On a :*
$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$ on sait qu'il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que :

$$\|f - f_1\|_p < \varepsilon$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \Omega^c \end{cases}$$

On a ainsi $f_2 \in L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ et par le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\rho_n * f_2 - f_2\|_{L^p} = 0$.
De plus, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant m, \;\; Supp(\rho_n * f_2) \subset B(0, \frac{1}{n}) + Supp f_2 \subseteq \Omega$$

On pose alors :

$$\forall n \geqslant m, \;\; u_n = \rho_n * f_2$$

On a ainsi $(u_n)_{n \geqslant m} \subset C_c^\infty(\Omega)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - f_2\|_p = 0$.
Par inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall n \geqslant m, \;\; \|u_n - f\|_p \leqslant \|u_n - f_2\|_p + \|f_2 - f\|_p \leqslant 2\varepsilon$$

D'où $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\Omega)$. □

Pour conclure, nous avons vu en quoi les espaces L^p généralisent les espaces l^p. Nous avons vu en particulier que les espaces L^p étaient complets, qu'ils possédaient des sous-espaces denses intéressants et que nous connaissions leurs duaux si $p \neq +\infty$. Nous nous sommes ensuite intéressés aux propriétés hilbertiennes de l'espace L^2. Le produit de convolution a ensuite été défini et certaines de ses propriétés ont été abordées. Nous avons vu en particulier l'utilité des suites régularisantes qui permettent par exemple de lisser les discontinuités par convolution ou encore de démontrer la densité des fonctions de classes C^∞ dans les espaces L^p ou de Sobolev.
Un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenu par combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre : si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$, $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; \|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant m, D^\alpha u \in L^p_{\mathbb{C}}(\lambda_d)\}$. Ces espaces de Sobolev sont des Banach particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équation aux dérivées partielles. Pour compléter ce projet, nous allons voir la construction de la mesure de Lebesgue en annexe.

Bibliographie :

-Brezis, H., Ciarlet, P.G., et Lions, J.L. (1987). Analyse fonctionnelle : Théorie et applications.
-Briane, M., Pagès, G. (2006). Théorie de l'intégration : cours et exercices : licence et master de mathématiques.
-Rudin, W., Dhombres, N., et Hoffman, F. (1975). Analyse réelle et complexe.
-Lieb, E.H, Loss, M. (2001). Analysis : Graduate studies in mathematics (vol. 14).
-Hirsch, F., Lacombe, G. (1999). Eléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses.
-Li, D. (2013). Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés.

A Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Le but de cette annexe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 20 (Existence, unicité et caractérisation de la mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b$, $\lambda([a;b]) = b - a$. λ est appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie :*

$$\lambda([0,1]) = 1 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda(. + a) \text{ (invariance par translation).}$$

Ces deux propriétés caractérisent la mesure de Lebesgue.

Définition 18. • *On appelle π-système, une famille $\mathscr{E}$ de parties de X contenant X et stable par intersection finie.*
• *Un λ-système est une famille Λ de parties de X vérifiant :*

(i) $\varnothing \in \Lambda$;

(ii) Si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'éléments de Λ, alors $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n \in \Lambda$ (Stabilité par réunion dénombrable croissante) ;

(iii) Si $A, B \in \Lambda$ sont tels que $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \Lambda$ (Stabilité par différence propre).

Proposition 18.

a) Si $\mathscr{E}$ est une famille de parties de X, alors il existe un plus petit λ-système $\Lambda(\mathscr{E})$ contenant $\mathscr{E}$.

b)Soit Λ un λ-système. Si $X \in \Lambda$ et Λ est stable par intersection finie, alors Λ est une tribu.

Démonstration. Pour le point a), il suffit de remarquer qu'il existe un λ-système contenant $\mathscr{E}$ puisque $\mathscr{P}(X)$ en est un, et que $\Lambda(\mathscr{E}) = \bigcap\limits_{\substack{\mathscr{E} \subset \Lambda \\ \Lambda\ \lambda\text{-système}}} \Lambda$ est un λ-système, qui est le plus petit contenant $\mathscr{E}$ par construction.
Pour le point b), on a que $X \in \Lambda$ donc Λ est stable par complémentaire d'après (iii). De plus, si $(A_n) \in \Lambda^{\mathbb{N}^*}$, comme $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \right)$, il suffit de montrer la stabilité par réunion finie.
Or, pour tout $A, B \in \Lambda$, $A \cup B = {}^c({}^cA \cap {}^cB) \in \Lambda$. Donc Λ est une tribu. □

Théorème 21. *Soit $\mathscr{E}$ un π-système. Alors $\Lambda(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.*

Démonstration. Il suffit, d'après la propriété précédente, de montrer que $\Lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie car on a déjà que $X \in \Lambda(\mathscr{E})$.
Soit $E \in \mathscr{E}$. On pose $\Lambda_E = \{A \in \Lambda(\mathscr{E}) / A \cap E \in \Lambda(\mathscr{E})\}$. Il est immédiat que Λ_E est un λ-système contenant $\mathscr{E}$, donc $\Lambda(\mathscr{E})$.
Autrement dit, pour tout $E \in \mathscr{E}$, pour tout $A \in \Lambda(\mathscr{E})$, $A \cap E \in \Lambda(\mathscr{E})$.
Donc si $B \in \Lambda(\mathscr{E})$ et $\Lambda_B = \{A \in \Lambda(\mathscr{E}) / A \cap B \in \Lambda(\mathscr{E})\}$, on a Λ_B qui est un λ-système contenant $\mathscr{E}$. Donc $\Lambda_B = \Lambda(\mathscr{E})$ pour tout $B \in \Lambda(\mathscr{E})$, *i.e* $\Lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie.
Donc, comme $X \in \Lambda(\mathscr{E})$ et que $\Lambda(\mathscr{E})$ est stable par intersection finie, le λ-système $\Lambda(\mathscr{E})$ est une tribu et $\Lambda(\mathscr{E}) \supset \sigma(\mathscr{E})$. De plus, une tribu est un λ-système, donc $\Lambda(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$.
D'où $\Lambda(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$. □

Corollaire 5. *Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, et $\mathscr{E} \subset \mathcal{A}$ un π-système engendrant $\mathcal{A}$ (i.e $\mathcal{A} = \sigma(\mathscr{E})$).*
Si, pour tout $E \in \mathscr{E}$, $\mu(E) = \nu(E)$ alors $\mu = \nu$.

Démonstration. On pose $\Lambda = \{A \in \mathcal{A} / \mu(A) = \nu(A)\}$. On a Λ qui est un λ-système. En effet, $\mu(\varnothing) = \nu(\varnothing) = 0$ car μ et ν sont deux mesures ; si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'éléments de Λ, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ donc $\mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n)$ donc $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \Lambda$; et si $A, B \in \Lambda$ sont tels que $A \subset B$, alors comme μ et ν sont finies, on a $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \backslash A)$ donc $B \backslash A \in \Lambda$. Donc Λ est un λ-système et $\Lambda \supset \mathscr{E}$, donc d'après le théorème précédent, $\mathcal{A} = \sigma(\mathscr{E}) = \Lambda(\mathscr{E}) \subset \Lambda$. □

Dans ce corollaire 5, on note que l'hypothèse de finitude faite sur les mesures finies sert à la stabilité par différence propre mais cette hypothèse peut être assouplie, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 6. *Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, et $\mathscr{E} \subset \mathcal{A}$ tels que :*

(i) $\mathscr{E}$ est un π-système et $\sigma(\mathscr{E}) = \mathcal{A}$;

(ii) Pour tout $A \in \mathscr{E}$, $\mu(A) = \nu(A)$;

(iii) Il existe une suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{E}$, croissante pour l'inclusion telle que $X = \bigcup_{n\geqslant 1} E_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$;
Alors $\mu = \nu$.

Démonstration. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $\mu_n = \mu(. \cap E_n)$ et $\nu_n = \nu(. \cap E_n)$ qui vérifient les hypothèses du corollaire 5 car, pour tout $n \geqslant 1$, comme $E_n \subset \mathscr{E}$ et $\mathscr{E}$ est stable par intersection finie, $\mathscr{E} \cap E_n \subset \mathscr{E}$, donc μ_n et ν_n coïncident sur $\mathscr{E}$ et donc par le corollaire 5, $\mu_n = \nu_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Soit $A \in \mathcal{A}$. On a $A = \bigcup_{n\geqslant 1} (A \cap E_n)$ donc, comme $(A \cap E_n)$ est croissante :

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap E_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \nu_n(A) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \nu(A \cap E_n) \\
&= \nu(A).
\end{aligned}$$

Donc $\mu = \nu$. □

Remarque 10. *On peut remplacer dans (iii) la suite croissante (E_n) par une partition de X ($X = \bigsqcup_{n\geqslant 1} E_n$) avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$.*

Proposition 19. *Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, invariante par translation et telle que $\mu([0, 1]) = 1$ alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a $\mu(I) = long(I)$ où $long(I)$ désigne la longueur de l'intervalle I.*
De plus, si une telle mesure μ existe, elle est unique.

Démonstration. Montrons, pour commencer, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
On pose $\alpha = \mu(\{0\})$. μ est invariante par translation donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = \alpha$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n\alpha = \mu\left(\left\{\frac{1}{k}, 1 \leqslant k \leqslant n\right\}\right) \leqslant \mu([0;1]) = 1$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{n}$, *i.e* $\alpha = 0$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
Comme μ est invariante par translation, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
1 = \mu([0;1]) = \mu(\{0\} \cup]0,1]) &= \mu(]0;1]) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \\
&= n\mu\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right)
\end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu\left(\left]0, \dfrac{1}{n}\right]\right) = \dfrac{1}{n}$.
Soit $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k_1 \leqslant k_2$. On a :

$$\mu\left(\left]\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right]\right) = \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mu\left(\left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = (k_2 - k_1)\frac{1}{n} = \frac{k_2}{n} - \frac{k_1}{n}$$

On en déduit que pour tout $(q, q') \in \mathbb{Q}^2$ tel que $q < q'$, $\mu(]q', q]) = q' - q$.
Soit maintenant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Il existe $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que (q_n) décroît vers a et $(q'_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que (q'_n) croît vers b vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n < q'_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n =]q_n, q'_n[$. (A_n) est une suite croissante d'intervalles vérifiant $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n =]a, b[$ donc :

$$\mu(]a,b[) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to +\infty} (q'_n - q_n) = b - a$$

Or $\mu([a,b]) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = \mu(]a,b[)$ donc pour tout I intervalle borné de $\mathbb{R}$, $\mu(I) = long(I)$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. $[a, +\infty[= \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [a+n-1, a+n[$ donc $\mu([a, +\infty[) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} 1 = +\infty$.
Les autres types d'intervalles se traitent de façon analogue.
Montrons désormais que si une telle mesure existe, elle est unique. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = [-n, n]$ et $\mathscr{E} = \{I, I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$.
Si λ et λ' sont deux mesures sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ invariantes par translation et telles que $\lambda([0,1]) = \lambda'([0,1]) = 1$, alors λ et λ' coïncident sur $\mathscr{E}$ d'après ce qui a été fait plus haut et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda([-n,n]) = \lambda'([-n,n]) = 2n < +\infty$. Comme $\mathscr{E}$ est clairement un π-système et que $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on peut donc conclure que $\lambda = \lambda'$ avec le corollaire 6 (on a bien $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} E_n = \mathbb{R}$). $\square$

A.1 Théorème de Carathéodory

Définition 19. *Une famille $\mathscr{C}$ de parties de X est une algèbre de Boole si :*

(i) $X \in \mathscr{C}$;

(ii) Pour tout $A, B \in \mathscr{C}$, $A \cup B \in \mathscr{C}$ (Stabilité par réunion finie) ;

(iii) Pour tout $A \in \mathscr{C}$, ${}^cA \in \mathscr{C}$ (Stabilité par complémentaire).

Théorème 22 (Carathéodory)**.** *Soient $\mathscr{C}$ une algèbre de Boole sur X et une application $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ telles que :*
(i) $\mu(\varnothing) = 0$;
(ii) $\forall (A, B) \in \mathscr{C}^2, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité finie) ;
(iii) Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$, si $\mu(A_0) < +\infty$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$;
(iv) Il existe une suite croissante $(E_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\alpha) & X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \\ (\beta) & \forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < +\infty \\ (\gamma) & \forall A \in \mathscr{C}, \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A \cap E_n) = \mu(A). \end{cases}$$

Il existe alors une unique mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$.

Avant de démontrer ce théorème, faisons quelques remarques et introduisons du vocabulaire qui nous seront utiles.

Remarque 11. • *La condition (iii) est appelée propriété de Carathéodory ou parfois "continuité de la mesure en $\varnothing$".*
• *La propriété de Carathéodory exprime la "continuité à droite" de μ le long des suites décroissantes d'éléments de $\mathscr{C}$ vers l'ensemble vide. Il est cependant utile de remarquer que, sous l'hypothèse d'additivité finie de μ sur $\mathscr{C}$, il y a équivalence entre (iii) et (iv)(γ) d'un côté et la propriété de "continuité à gauche" de μ sur $\mathscr{C}$ de l'autre :*

$$\forall (A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}} \textit{ croissante, } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration. On suppose (iii) et (iv)(γ) vraies. Montrons que μ est "continue à gauche" sur $\mathscr{C}$.
Soit $(A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C}$.
$*$ Si $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) < +\infty$, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A'_k := (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)\backslash A_k$. Comme (A_n) est croissante, (A'_n) est décroissante et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A'_n = \varnothing$ donc, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A'_k) + \mu(A_k)$, on a, en faisant un passage à la limite :

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) + 0 = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

$*$ Sinon $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = +\infty$ et, d'après le cas précédent, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap E_p\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E_p)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n \cap E_p) = \varliminf_{n\to+\infty} \mu(A_n \cap E_p) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Or, d'après (iv)(γ), comme $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C}$,

$$\varliminf_{p\to+\infty} \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap E_p\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty$$

d'où $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = +\infty$ et finalement μ est bien "continue à gauche" sur $\mathscr{C}$.
Réciproquement, supposons μ "continue à gauche" sur $\mathscr{C}$.
$*$ Soit $(A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $\mu(A_0) < +\infty$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A'_n = A_0 \backslash A_n$. (A'_n) est une suite croissante vérifiant $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A'_n = A_0 \in \mathscr{C}$. μ est "additive finie" donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $(A_0 \backslash A_n) \cap A_n = \varnothing$, $\mu(A_0) = \mu(A'_n) + \mu(A_n)$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu(A_0) - \mu(A_0) = 0$$

d'où (iii) est vraie.
$*$ Pour tout $A \in \mathscr{C}$, $(A \cap E_n)$ est croissante et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap E_n) = A \in \mathscr{C}$ donc $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A \cap E_n)$ d'où (iv)(γ) est vraie. □

Définition 20. *(a) Une application $\mu : \mathscr{C} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ vérifiant les conditions (i) à (iii) (respectivement (i) à (iv)) du théorème de Carathéodory est appelée une mesure (respectivement mesure σ-finie) sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$.*
(b) Une application $m : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est appelée mesure extérieure ssi elle vérifie :

$$\begin{cases} (i) & m(\varnothing) = 0 \\ (ii) & \forall (A,B) \in \mathcal{P}(X)^2, A \subset B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B) \ \textit{(croissance)} \\ (iii) & \textit{pour toute suite } (A_n) \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}, m(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \ \textit{(σ-sous-additivité)} \end{cases}$$

On notera bien qu'une mesure extérieure est toujours définie sur l'ensemble de toutes les parties de X.

Remarque 12. *Une mesure μ sur une algèbre de Boole $\mathscr{C}$ vérifie clairement les propriétés de croissance et d'additivité forte, autrement dit :*
Pour tout $A, B \in \mathscr{C}$ tels que $A \subset B$, on a $B \backslash A = B \cap {}^c A \in \mathscr{C}$ et $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A)$; et pour tout $A, B \in \mathscr{C}$, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Nous pouvons désormais démontrer le théorème de Carathéodory :

Démonstration. Une algèbre de Boole étant en particulier un π-système, l'unicité est une conséquence immédiate du corollaire 6.

Montrons alors l'existence de $\tilde{\mu}$.
Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas $\mu(X) < +\infty$. Nous allons procéder en plusieurs étapes. (On remarque que l'hypothèse (iv) ne nous apporte aucune information.)

Etape 1 : propriétés d'une mesure définie sur une algèbre de Boole
(a) μ est σ-additive sur $\mathscr{C}$ *i.e* pour toute suite $(A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A'_n := \bigcup\limits_{k\geqslant n+1} A_k = (\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k)\backslash(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k) \in \mathscr{C}$, les ensembles $A_1, \cdots, A_n, A'_n$ sont deux à deux disjoints et $A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A'_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ donc, par additivité finie : $\mu(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) + \mu(A'_n)$.
Or (A'_n) est décroissante et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A'_n = \varnothing$ d'où le résultat avec (iii) en passant à la limite.
(b) D'après la remarque 11, μ est "continue à gauche" *i.e* pour toute suite croissante $(A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

(c) μ est σ-sous-additive sur $\mathscr{C}$ *i.e*

$$\forall (A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

En effet, soit $(A_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$; posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : "$\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \mu(A_k)$" (on note que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est bien définie car $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{C}$).
H_0 est vraie.

$$\mu(A_0 \cup A_1) \leqslant \mu(A_0 \cup A_1) + \mu(A_0 \cap A_1) = \mu(A_0) + \mu(A_1)$$

donc H_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie.

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) = \mu\left(A_{n+1} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right) \leqslant \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{n+1} \mu(A_k),$$

l'inégalité découlant de H_1 et H_n. H_{n+1} est donc vraie.
Le principe de récurrence assure alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \mu(A_k)$.
En appliquant (b), on a alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Etape 2 : Construction d'une mesure extérieure μ^* prolongeant μ

Pour tout $A \subset X$, on pose :

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n), A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in \mathscr{C} \right\}$$

Montrons que μ^* est une mesure extérieure coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$ (μ^* sera donc finie puisque $X \in \mathscr{C}$).
• Montrons que $\mu^*=\mu$ sur $\mathscr{C}$.
Soit $A \in \mathscr{C}$. En posant $B_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \varnothing$, on montre que $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$.
Soit $(B_n) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap E_n)$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap E_n \in \mathscr{C}$ donc, comme on a montré à l'étape 1 que μ était σ-sous-additive sur $\mathscr{C}$ et que μ est croissante, on a :

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

d'où $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$ par définition de μ^*.
Et finalement, $\mu = \mu^*$ sur $\mathscr{C}$.
• Montrons que μ^* est une mesure extérieure.

— $\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$ car $\varnothing \in \mathscr{C}$.

— Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(X)^2$ tel que $A \subset B$.

$$\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n), B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in \mathscr{C} \right\} \subset \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n), A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in \mathscr{C} \right\}$$

donc, d'après les propriétés des bornes inférieures, $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

— Soit $(A_n) \in \mathscr{P}(X)^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$.
Par définition de μ^*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k^{(n)}$ et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leqslant \mu^*(A_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ d'où, en sommant :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

Or $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup\limits_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} B_k^{(n)}$ et $\mathbb{N}^2$ est dénombrable donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \mu^* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} B_k^{(n)} \right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

d'où $\mu^* \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ donc μ^* est σ-sous-additive.
Finalement, μ^* est bien une mesure extérieure coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$.

Etape 3 : Fabrication de $\tilde{\mu}$ par restriction de la mesure extérieure μ^*
On a :
(a) $\mathscr{T}^* := \{A \subset X; \forall B \subset X, \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap^c A)\}$ est une tribu contenant $\mathscr{C}$, et donc $\sigma(\mathscr{C})$.
(b) La restriction de μ^* à $\mathscr{T}^*$ est une mesure sur $(X, \mathscr{T}^*)$ d'où $\tilde{\mu} := \mu^*_{|\sigma(\mathscr{C})}$ est une solution au problème de prolongement.
En effet :
• $X \in \mathscr{T}^*$ car :

$$\forall B \subset X, \mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \cap^c X) = \mu^*(B) + \mu^*(\varnothing) = \mu^*(B) + 0 = \mu^*(B)$$

• Si $A \in \mathscr{T}^*$, pour tout $B \subset X$, $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap^c ({}^cA)) + \mu^*(B \cap^c A)$ donc ${}^cA \in \mathscr{T}^*$
• -Stabilité par réunion finie :
Soit $A, A' \in \mathscr{T}^*$. Pour tout $B \subset X$, comme $B \cap A \subset X$ et $B \cap^c A \subset X$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap^c A) \\
&\quad = \mu^*((B \cap A) \cap A') + \mu^*((B \cap A) \cap^c A') + \mu^*((B \cap^c A) \cap A') + \mu^*((B \cap^c A) \cap^c A') \\
&\quad = \mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \cap (A \cap^c A')) + \mu^*(B \cap ({}^cA \cap A')) + \mu^*(B \cap^c (A \cup A'))
\end{aligned}$$

Or $B \cap (A \cup A') = (B \cap (A \cap A')) \cup (B \cap (A \cap^c A')) \cup (B \cap ({}^cA \cap A'))$ d'où, comme μ^* est σ-sous-additive :

$$\mu^*(B \cap (A \cup A')) + \mu^*(B \cap^c (A \cup A')) \leqslant \mu^*(B)$$

et :

$$\mu^*(B) = \mu^*((B \cap (A \cup A')) \cup (B \cap^c (A \cup A'))) \leqslant \mu^*(B \cap (A \cup A')) + \mu^*(B \cap^c (A \cup A'))$$

et finalement $A \cup A' \in \mathscr{T}^*$. $\mathscr{T}^*$ est alors une algèbre de Boole.
-Stabilité par réunion dénombrable et σ-additivité de μ^* sur $\mathscr{T}^*$:
Pour tout $n \geqslant 2$, on pose H_n : "pour tout $A_1, \cdots A_n \in \mathscr{T}^*$ deux à deux disjoints, pour tout $B \subset X$, $\mu^*(B) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i)$"
Soit $A_1, A_2 \in \mathscr{T}^*$ tel que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
$A_2 \subset^c A_1$ et μ^* est croissante donc :

$$\forall B \subset X, \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2) \leqslant \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap^c A_1) = \mu^*(B)$$

Donc H_2 est vraie. Soit $n \geqslant 2$ tel que H_n soit vraie.
Soit $A_1, \cdots, A_{n+1} \in \mathscr{T}^*$ deux à deux disjoints. Soit $B \subset X$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(B \cap A_i) &= \mu^*(B \cap A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i) \\
&= \mu^*(B \cap A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*\left(\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) \cap A_i\right) \\
&\leqslant \mu^*(B \cap A_{n+1}) + \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) \text{ d'après } H_n
\end{aligned}$$

Or $A_{n+1} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = \varnothing$ donc,d'après H_2, H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence assure alors que :

$$\forall n \geqslant 2, \forall A_1, \cdots A_n \in \mathscr{T}^* \text{ deux à deux disjoints, }, \forall B \subset X, \mu^*(B) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B \cap A_i)(*)$$

Montrons maintenant que $\mathscr{T}^*$ est stable par réunion dénombrable.
Soit $(A_n) \in (\mathscr{T}^*)^{\mathbb{N}}$. On pose $A'_0 := A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A'_n := A_n \backslash \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A'_k \right)$.
Les A'_n sont deux à deux disjoints et on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A'_n \subset A_n = \bigcup_{i=0}^{n} A'_i$. On a alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n$, et comme $\mathscr{T}^*$ est une algèbre de Boole, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A'_n \in \mathscr{T}^*$.
Il suffit donc de montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \in \mathscr{T}^*$.
Soit $B \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. Comme $\bigcup_{k=0}^{n} A'_k = A_n \in \mathscr{T}^*$, on a :

$$\mu^*(B) = \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} A'_k \right) \right) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{k=0}^{n} A'_k \right) \right)$$

De plus, $A'_0, \cdots, A'_n, {}^c \left(\bigcup_{k=0}^{n} A'_k \right)$ sont deux à deux disjoints donc, d'après $(*)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B \cap A'_k) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{k=0}^{n} A'_k \right) \right) \leqslant \mu^*(B)$$

D'où, en passant à la limite :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A'_n) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \leqslant \mu^*(B) \ (**)$$

On en déduit alors, comme μ^* est σ-sous-additive :

$$\begin{aligned} \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) &= \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A'_n) \right) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \\ &\leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(B \cap A'_n) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \\ &\leqslant \mu^*(B) \end{aligned}$$

On peut également en déduire :

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^* \left(\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \cup \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \right) \\ &\leqslant \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) + \mu^* \left(B \cap^c \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n \right) \right) \end{aligned}$$

D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \in \mathscr{T}^*$.
Finalement, $\mathscr{T}^*$ est bien une tribu.
De plus, en posant $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ dans (∗∗), on a que pour toute suite $(A'_n) \in (\mathscr{T}^*)^{\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A'_n)$$

d'où μ^* est σ-additive sur $\mathscr{T}^*$. C'est donc bien une mesure sur $(X, \mathscr{T}^*)$.
-La tribu $\mathscr{T}^*$ contient $\sigma(\mathscr{C})$:
Soit $A \in \mathscr{C}$, $B \subset X$, $\varepsilon > 0$.
Par définition de μ^*, il existe $(B_n^\varepsilon) \in (\mathscr{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\varepsilon$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n^\varepsilon) \leqslant \mu^*(B) + \varepsilon$.
Or μ est additive sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n^\varepsilon \cap A, B_n^\varepsilon \cap^c A \in \mathscr{C}$ donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap^c A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n^\varepsilon \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n^\varepsilon \cap^c A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(B_n^\varepsilon \cap A) + \mu(B_n^\varepsilon \cap^c A)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n^\varepsilon) \\
&\leqslant \mu^*(B) + \varepsilon
\end{aligned}$$

et μ^* est σ-sous-additive d'où, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap^c A) &\leqslant \mu^*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\varepsilon\right) \cap A\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\varepsilon\right) \cap^c A\right) \\
&\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n^\varepsilon \cap^c A) \\
&\leqslant \mu^*(B) + \varepsilon
\end{aligned}$$

On a alors, en passant à la limite :

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap^c A) \leqslant \mu^*(B)$$

et comme $\mu^*(B) = \mu^*((B \cap A) \cup (B \cap^c A)) \leqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap^c A)$, on a $A \in \mathscr{T}^*$.
Donc $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}^*$ et comme $\mathscr{T}^*$ est une tribu, $\mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$

Nous nous plaçons maintenant dans le cas général : μ est σ-finie.
D'après l'hypothèse (iv), il existe une suite croissante $(E_p) \in \mathscr{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mu(E_p) < +\infty, X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_p \text{ et } \forall A \in \mathscr{C}, \lim_{p\to+\infty} \mu(A \cap E_p) = \mu(A).$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_p := \mu(. \cap E_p)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, μ_p est une mesure finie sur l'algèbre de Boole $\mathscr{C}$ donc μ_p se prolonge en une mesure finie $\tilde{\mu}_p$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$.

De plus, comme (E_p) est croissante, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mu}_{p+1}(. \cap E_p) = \tilde{\mu}_p$ d'après le corollaire 6 puisque $\mathscr{C}$ est un π-système et que pour tout $A \in \mathscr{C}$, on a :

$$\tilde{\mu}_{p+1}(A \cap E_p) = \mu((A \cap E_p) \cap E_{p+1}) = \mu(A \cap E_p) = \tilde{\mu}_p(A).$$

D'où :

$$\forall A \in \sigma(\mathscr{C}), \forall p \in \mathbb{N}, \tilde{\mu}_p(A) = \tilde{\mu}_{p+1}(A \cap E_p) \leqslant \tilde{\mu}_{p+1}(A)$$

$i.e$ pour tout $A \in \sigma(\mathscr{C})$, la suite $(\tilde{\mu}_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On pose alors, pour tout $A \in \sigma(\mathscr{C})$, $\tilde{\mu}(A) := \lim\limits_{p\to+\infty} \tilde{\mu}_p(A)$.
Montrons que $\tilde{\mu}$ est une mesure sur $\sigma(\mathscr{C})$.

— Pour tout $A \in \sigma(\mathscr{C})$, $\tilde{\mu}(A) \geqslant 0$.

— $\tilde{\mu}(\varnothing) = \lim\limits_{p\to+\infty} \tilde{\mu}_p(\varnothing) = 0$.

— Soit $(A_n) \in \sigma(\mathscr{C})^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tilde{\mu}_p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}_p(A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n)$$

d'où :

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{p\to+\infty} \tilde{\mu}_p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n).$$

De plus, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\tilde{\mu}_p\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{\mu}_p(A_k)$ donc, en passant à la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \tilde{\mu}(A_k)$$

d'où $\tilde{\mu}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n)$.
On a alors que $\tilde{\mu}$ est σ-additive sur $\sigma(\mathscr{C})$.

Finalement $\tilde{\mu}$ est bien une mesure sur $\sigma(\mathscr{C})$. Montrons qu'elle coïncide avec μ sur $\mathscr{C}$.
Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on déduit de (iv) que :

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{p\to+\infty} \tilde{\mu}_p(A) = \lim_{p\to+\infty} \mu(A \cap E_p) = \mu(A).$$

On a alors l'existence d'une mesure $\tilde{\mu}$ sur la tribu $\sigma(\mathscr{C})$ coïncidant avec μ sur $\mathscr{C}$. $\square$

A.2 Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Nous allons pour cela appauvrir la structure d'algèbre de Boole.

Définition 21. *Une famille $\mathscr{S}$ de parties de X est une semi-algèbre si :*

(i) $\varnothing \in \mathscr{S}$;

(ii) Pour tout $A, B \in \mathscr{S}$, $A \cap B \in \mathscr{S}$ (Stabilité par intersection finie) ;

(iii) Pour tout $A \in \mathscr{S}$, il existe $n \geqslant 1$ et $A_1, ..., A_n \in \mathscr{S}$ 2 à 2 disjoints tels que ${}^cA = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Remarque 13. *La famille $\mathscr{S}_I = \{I \subset \mathbb{R}, I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$ est une semi-algèbre car $\varnothing \in \mathscr{S}_I$, l'intersection de deux intervalles reste un intervalle et pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, ${}^cI = I_1 \cup I_2$ où I_1, I_2 sont deux intervalles disjoints.*

Proposition 20. *Soit $\mathscr{S}$ une semi-algèbre.*
(a) $\mathscr{C}(\mathscr{S}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \ A_i \in \mathscr{S},\ \text{deux à deux disjoints, } n \geqslant 1 \right\}$ est la plus petite algèbre de Boole contenant $\mathscr{S}$.
(b) Soit $\mu : \mathscr{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :
- $\mu(\varnothing) = 0$
- $\forall A, B \in \mathscr{S},\ \ A \cup B \in \mathscr{S}$ *et* $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Alors μ admet un unique prolongement $\overline{\mu}$ sur $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ vérifiant la propriété d'additivité finie ((ii) du théorème de Carathéodory).

Démonstration. (a) Toute algèbre de Boole contenant $\mathscr{S}$ contient $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ (stabilité par réunion finie). Montrons donc que $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est une algèbre de Boole :
- $\varnothing \in \mathscr{S} \subset \mathscr{C}(\mathscr{S})$
- Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Soient $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Soient A_i, $B_j \in \mathscr{S}$.

$\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est stable par intersection finie car d'une part, on a :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$$

et que d'autre part les $A_i \cap B_j$ sont deux à deux disjoint dès que les familles $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(B_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ sont constituées de parties deux à deux disjointes.
Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{C}(\mathscr{S})$: par hypothèse chaque ${}^cA_i = \bigcup_{k=1}^{m(i)} B_k^{(i)}$ où les $B_k^{(i)}$ sont des parties de $\mathscr{S}$ deux à deux disjointes.
On peut remplacer les $m(i)$ par $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} m(i)$ (il suffit d'ajouter des $B_k^{(i)} = \varnothing$). On a alors, en développant :

$${}^cA = \bigcap_{i=1}^{n} {}^cA_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k=1}^{m} B_k^{(i)}\right) = \bigcup_{1 \leqslant k_1, \ldots, k_n \leqslant m} \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_{k_i}^{(i)}\right)$$

Comme $\mathscr{S}$ est stable par intersection finie et que les $\bigcap_{i=1}^{n} B_{k_i}^{(i)}$, $1 \leqslant k_1, \cdots, k_n \leqslant m$ sont deux à deux disjoints, on a ${}^cA \in \mathscr{C}(\mathscr{S})$.
$\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est stable par union finie car $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est stable par intersection finie et complémentaire.
Donc $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ est la plus petite algèbre de Boole qui contient $\mathscr{S}$, puisque toute algèbre de Boole contenant $\mathscr{S}$ contient $\mathscr{C}(\mathscr{S})$.

(b)Pour tout $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{C}(\mathscr{S})$ (les $A_i \in \mathscr{S}$ sont deux à deux disjoints), on pose :

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Si A admet une autre décomposition ($A = \bigcup_{j=1}^m B_j$), on a alors, par additivité de μ sur $\mathscr{S}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$$

donc $\overline{\mu}$ est bien définie. De plus, $\overline{\mu}$ est entièrement déterminée par les valeurs de μ sur $\mathscr{S}$, d'où l'unicité. L'additivité finie vient de la définition de $\overline{\mu}$.
Donc μ admet un unique prolongement $\overline{\mu}$ sur $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ vérifiant la propriété d'additivité finie. □

Remarque 14. *Par l'additivité finie de $\overline{\mu}$, on déduit ces trois propriétés :*

•$\forall A, B \in \mathscr{C}, (\mathscr{S})\ \ A \subset B \Rightarrow \overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$ *(croissance)*

•$\forall A, B \in \mathscr{C}, (\mathscr{S})\ \ \overline{\mu}(A \cup B) + \overline{\mu}(A \cap B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$ *(forte additivité)*

•$\forall (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{C}, (\mathscr{S})\ \ \overline{\mu}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\mu}(A_i)$ *(sous-additivité finie)*

Définition 22. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur de I, $long(I)$, est définie sur $\overline{\mathbb{R}_+}$ par $long(I) = sup(I) - inf(I) \leqslant +\infty$ si $I \neq \varnothing$, et $long(\varnothing) = 0$.*

On a par ailleurs que la semi-algèbre $\mathscr{S}_I = \{I \subset \mathbb{R}, I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$ vérifie $\sigma(\mathscr{S}_I) = \sigma([a, +\infty[, a \in \mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Théorème 23 (Existence, unicité et caractérisation de la mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, noté λ, coïncidant avec la mesure de longueur long sur $\mathscr{S}_I$. λ est appelée la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie :*

$$\lambda([0,1]) = 1 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{R},\ \lambda = \lambda(. + a) \text{ (invariance par translation).}$$

Ces deux propriétés caractérisent la mesure de Lebesgue.

Démonstration. La mesure de longueur *long* est clairement finiment additive sur $\mathscr{S}_I$ au sens de la proposition 20 car si I et J sont deux intervalles tel que $I \cap J = \varnothing$, alors $long(I \cup J) = long(I) + long(J)$.
D'après la proposition 20, elle admet donc un unique prolongement $\overline{long}$ à l'algèbre $\mathscr{C}(\mathscr{S}_I) = \{I_1 \cup ... \cup I_n, I_k \text{ intervalles 2 à 2 disjoints}, n \geqslant 1\}$ qui est finiment additive au sens de la condition (ii) du théorème 22. Le point (i) du théorème 22 est immédiat. Montrons que $\overline{long}$ vérifie les conditions (iii) et (iv) de ce théorème.
Vérification de (iii) :
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante pour l'inclusion d'éléments de $\mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$ vérifiant $\overline{long}(A_1) < +\infty$ et $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} A_n = \varnothing$. Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \overline{long}(A_n) = 0$.
L'ensemble A_1 est une réunion finie d'intervalle de longueur globale finie, donc A_1 est bornée et pour tout $n \geqslant 1$, on écrit : $A_n = I_1^{(n)} \cup ... \cup I_{p_n}^{(n)}$ où pour tout $k \in \{1, ..., p_n\}$ $I_k^{(n)}$ sont des intervalles deux à deux disjoints.
Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \varnothing$, comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, on a

bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{long}(A_n) = 0$.
Sinon, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $k \in \{1, ..., p_n\}$:

$$J_k^{(n)} = \left[\alpha_k^{(n)} + \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}}, \beta_k^{(n)} - \frac{\varepsilon}{p_n 2^{n+1}}\right] \text{ si } \beta_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)} \geqslant \frac{\varepsilon}{p_n 2^n} \text{ et sinon } J_k^{(n)} = \varnothing$$

où pour tout $n \geqslant 1$, $k \in \{1, ..., p_n\}$, $\alpha_k^{(n)}$ et $\beta_k^{(n)}$ désignent respectivement les bornes inférieures et supérieures de $I_k^{(n)}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $k \in \{1, ..., p_n\}$, l'intervalle $J_k^{(n)}$ est un compact (segment de $\mathbb{R}$) éventuellement vide, contenu dans $I_k^{(n)}$.
On pose alors, pour tout $n \geqslant 1$, $A'_n = \bigcup\limits_{k=1}^{p_n} J_k^{(n)}$. On a clairement pour tout $n \geqslant 1$, $A'_n \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$, $A'_n \subset A_n$ et $\overline{long}(A_n \backslash A'_n) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2\varepsilon}{p_n 2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}$
Par construction, pour tout $n \geqslant 1$, A'_n est compact donc fermé dans le compact $\overline{A_1}$ (les fermés bornées de $\mathbb{R}$ sont les compacts de $\mathbb{R}$), et $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A'_n = \varnothing$. Il existe donc $n_\varepsilon \geqslant 1$ tel que $\bigcap\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} A'_k = \varnothing$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
A_{n_\varepsilon} &= \bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k \\
&= \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \backslash \left(\bigcap_{j=1}^{n_\varepsilon} A'_j\right) \\
&= \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \bigcap {}^c\left(\bigcap_{j=1}^{n_\varepsilon} A'_j\right) \\
&= \left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} {}^c A'_j\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \bigcap {}^c A'_j\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_\varepsilon} A_k\right) \backslash A'_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} (A_j \backslash A'_j)
\end{aligned}$$

Donc $\overline{long}(A_{n_\varepsilon}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} \overline{long}(A_k \backslash A'_k) \leqslant \varepsilon$.
Finalement, pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, il vient $\overline{long}(A_n) \leqslant \overline{long}(A_{n_\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{long}(A_n) = 0$.
Vérification de (iv) :
On pose $E_n = [-n, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ et $long(E_n) = 2n$.
Soit $A \in \mathscr{C}(\mathscr{S}_I)$. Si $\overline{long}(A) < +\infty$, alors A est borné et pour n assez grand, $A \subset E_n$ donc $\overline{long}(A \cap E_n) = \overline{long}(A)$ et (iv) est vérifiée dans ce cas.
Si $\overline{long}(A) = +\infty$, alors au moins l'un des intervalles constituant A n'est pas borné, il suffit donc de vérifier (γ) pour ceux-ci. Traitons le cas d'un intervalle de la forme $[a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$.
Pour n assez grand, $\overline{long}([a, +\infty[\cap E_n) = \overline{long}([a, n]) = n - a$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{long}([a, +\infty[\cap E_n) =$

$+\infty = \overline{long}([a, +\infty[)$. On montre ceci de même pour les autres intervalles non bornés.
D'où (iv) pour $\overline{long}$.

Il reste à montrer les propriétés de la mesure de Lebesgue.
La mesure de Lebesgue $\lambda = \widetilde{\overline{long}}$ ainsi construite sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est unique grâce à la proposition 19.
De plus, pour $a \in \mathbb{R}$, la mesure $\lambda(. + a)$ coïncide avec λ sur $\mathscr{S}_I$ car $long(I + a) = long(I)$ pour tout $I \in \mathscr{S}_I$. Donc elles coïncident sur $\sigma(\mathscr{S}_I) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
D'autre part, $\lambda([0, 1]) = long([0, 1]) = 1 - 0 = 1$.

Donc l'invariance par translation et le fait que la mesure du segment unité vaut 1 caractérisent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. $\square$