Université de Franche-Comté

Projet de Master 2

Aspects asymptotiques et locaux en géométrie non linéaire des espaces de Banach

FOVELLE Audrey

Encadrant : M. LANCIEN Gilles

Année 2019-2020

Table des matières

Introduction

Lorsqu'on étudie une propriété linéaire d'un espace de Banach, il est intéressant de savoir si celle-ci est stable par certains types d'applications non linéaires (comme les plongements lipchitziens, grossiers, uniformes etc, définis plus loin).
On sait par exemple que la lissité asymptotique est préservée par homéomorphisme uniforme et que les propriétés locales le sont par plongement grossièrement Lipschitzien.
Il s'avère donc très utile de savoir si un espace de Banach donné X admet une unique structure de réseau, *i.e* si tout espace Y vérifiant $Y \underset{N}{\sim} X$ est tel que $Y \simeq X$.

L'objectif de ce mémoire est de montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 < p_1 < \cdots < p_n < +\infty$ vérifiant $2 \notin \{p_1, \cdots, p_n\}$, l'espace $\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$ admet une unique structure de réseau, puis d'étendre le cas $n = 1$ à l'espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{\ell_p}$, avec $(p, r) \in]1, +\infty[^2$ tel que $p < \min(r, 2)$ ou $p > \max(r, 2)$.

Pour cela, nous commencerons par introduire plusieurs objets, comme les différents types de plongement que nous considérerons, les espaces de suites d'Orlicz, les modules de lissité et de convexité asymptotiques, ou encore les ultrapuissances.

Nous montrerons ensuite que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 < p_1 < \cdots < p_n < +\infty$ vérifiant $2 \notin \{p_1, \cdots, p_n\}$, l'espace $\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$ admet une unique structure de réseau. La preuve de ce résultat se faisant par récurrence, nous débuterons par le cas $n = 1$, qui repose sur l'utilisation de deux techniques : le principe des milieux approchés et les graphes de Kalton-Randrianarivony. Nous montrerons également que, pour $p \in [1, +\infty[\backslash \{2\}$, $\ell_p(\ell_2)$ ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans $\ell_p \oplus \ell_2$.
L'article utilisé pour cette partie est celui de Kalton et Randrianarivony, publié en 2008 (cf [20]).

Pour finir, nous montrerons que si $(p, r) \in]1, +\infty[$ est tel que $p < \min(r, 2)$ ou $p > \max(r, 2)$, l'espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{\ell_p}$ admet une unique structure de réseau, en suivant la preuve de Kalton, issue de [17].
Pour y parvenir, nous aurons besoin d'introduire plusieurs outils supplémentaires, comme des propriétés d'approximation ou la notion de modèle étalé. Ceci fera l'objet d'une première sous-partie. Nous prouverons ensuite dans une deuxième sous-partie les différents résultats intermédiaires utilisés dans la preuve du théorème souhaité.
Nous conclurons cette partie par la démonstration du fait que, pour tout $p \in]1, +\infty[$, on a : $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p} \simeq \ell_p$. Grâce au résultat de la deuxième partie, on disposera alors d'une preuve plus simple de l'unicité de la structure de réseau de $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$ pour $p \in]1, +\infty[$.

Tous les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $L_p = L_p([0,1])$ et, pour tout espace métrique E, $\mathscr{B}(E)$ désigne la tribu des boréliens de E.

1 Préliminaires

Introduisons dans cette première partie les différentes notions dont nous aurons besoin par la suite.

1.1 Notations et théorie de Ramsey

Commençons par introduire quelques notations et prouver le théorème de Ramsey.

Notations 1. *Pour tout espace de Banach X, on note B_X la boule unité fermée de X et S_X la sphère unité de X.*

Notations 2. *Pour tout $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}$, on note $[\mathbb{M}]^\omega$ l'ensemble des sous-ensembles infinis de $\mathbb{M}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $[\mathbb{M}]^k = \{(n_1, \cdots, n_k) \in \mathbb{M}^k; n_1 < \cdots < n_k\}$.*

Théorème 1 (Ramsey)**.** *Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $k \in \mathbb{N}^*$, F un ensemble fini, $\phi : [\mathbb{M}]^k \to F$ une application.*
Il existe $f \in F$ et $\mathbb{L} \in [\mathbb{M}]^\omega$ tels que, pour tout $\overline{n} \in [\mathbb{L}]^k$, on ait $\phi(\overline{n}) = f$.

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose H_k : pour tout $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, pour tout ensemble fini F, pour toute application $\phi : [\mathbb{M}]^k \to F$, il existe $f \in F$ et $\mathbb{L} \in [\mathbb{M}]^\omega$ tels que, pour tout $\overline{n} \in [\mathbb{L}]^k$, on ait $\phi(\overline{n}) = f$.
On note que H_1 est vraie (c'est le principe des tiroirs).
Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que H_{k-1} soit vraie.
Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, F un ensemble fini, $\phi : [\mathbb{M}]^k \to F$ une application.
• Posons $n_1 = \min \mathbb{M}$, $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\mathbb{M} \setminus \{n_1\}]^{k-1} & \to & F \\ (m_2, \cdots, m_k) & \mapsto & \phi(n_1, m_2, \cdots, m_k) \end{array} \right.$.
L'hypothèse de récurrence assure qu'il existe $\mathbb{M}_1 \in [\mathbb{M} \setminus \{n_1\}]^\omega$ et $f_1 \in F$ tels que, pour tout $\overline{m} = (m_2, \cdots, m_k) \in [\mathbb{M}_1]^{k-1}$, on ait $\phi(n_1, m_2, \cdots, m_k) = \psi(\overline{m}) = f_1$.
• Posons $n_2 = \min \mathbb{M}_1 > n_1$. De nouveau, il existe $\mathbb{M}_2 \in [\mathbb{M}_1 \setminus \{n_2\}]^\omega$ et $f_2 \in F$ tels que, pour tout $\overline{m} = (m_2, \cdots, m_k) \in [\mathbb{M}_2]^{k-1}$, on ait $\phi(n_2, m_2, \cdots, m_k) = f_2$.
• On répète cette opération une infinité de fois. On obtient alors une suite décroissante $(\mathbb{M}_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \subset [\mathbb{M}]^\omega$ et une suite strictement croissante $(n_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{M}$. Quitte à extraire, on peut supposer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $f_j = f \in F$, ce qui conclut en posant $\mathbb{L} = \{n_j, j \in \mathbb{N}^*\}$. $\square$

Nous nous servirons de ce théorème via les deux corollaires ci-dessous.

Corollaire 1. *Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $k \in \mathbb{N}^*$, (K, d) un espace métrique compact, $\phi : [\mathbb{M}]^k \to K$ une application, $\varepsilon > 0$.*
Il existe $\mathbb{L} \in [\mathbb{M}]^\omega$ tel que, pour tous $\overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{L}]^k$, on ait $d(\phi(\overline{n}), \phi(\overline{m})) < \varepsilon$.

Démonstration. Comme K est compact, on peut trouver une famille finie $(O_f)_{f \in F}$ de sous-ensembles de K, deux à deux disjoints, recouvrant K et de diamètre strictement inférieur à ε.
Pour tout $\overline{n} \in [\mathbb{M}]^k$, il existe un unique $f = \psi(\overline{n}) \in F$ tel que $\phi(\overline{n}) \in O_f$.
D'après le théorème de Ramsey, il existe $\mathbb{L} \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $f \in F$ tels que, pour tout $\overline{n} \in [\mathbb{L}]^k$, on ait $\psi(\overline{n}) = f$. On en déduit que, pour tous $\overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{L}]^k$, on a $d(\phi(\overline{n}), \phi(\overline{m})) < \varepsilon$. $\square$

Corollaire 2. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach,* $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$, $K \subset X$ *un ensemble compact,* $f : [\mathbb{M}]^k \to X$ *une application vérifiant* $f([\mathbb{M}]^k) \subset K + \delta B_X$.
Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ *tel que* $\mathrm{diam}(f([\mathbb{M}']^k)) \leq 2\delta + \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g : [\mathbb{M}]^k \to K$ et $h : [\mathbb{M}]^k \to \delta B_X$ vérifiant $f = g + h$. D'après le corollaire 1, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ tel que $\mathrm{diam}(g([\mathbb{M}']^k)) < \varepsilon$. On a donc :

$$\forall \overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{M}']^k, \|f(\overline{n}) - f(\overline{m})\| \leq \|h(\overline{n})\| + \|h(\overline{m})\| + \|g(\overline{n}) - g(\overline{m})\| < 2\delta + \varepsilon$$

ce qui assure le résultat. □

1.2 Différents types d'applications et de plongements

Dans la suite, nous considérerons divers plongements entre espaces de Banach, introduits dans cette sous-partie. Commençons par définir les plongements non-linéaires.

Définition 1. *Soit* (M, d) *un espace métrique.*
• *Soit* $0 < A \leq B$*. On dit qu'un ensemble* $\mathcal{N} \subset M$ *est un* (A, B)*-réseau de* M *si :*
(i) *pour tous* $x \neq y \in \mathcal{N}$, $d(x, y) \geq A$ *;*
(ii) *pour tout* $z \in M$*, il existe* $x \in \mathcal{N}$ *tel que* $d(x, z) < B$.
Si $B = A$*, on dit simplement que* $\mathcal{N}$ *est un* A*-réseau de* M.
• *On dit qu'un sous-ensemble* $\mathcal{N} \subset M$ *est un réseau de* M *s'il existe* $0 < A \leq B$ *tels que* $\mathcal{N}$ *soit un* (A, B)*-réseau de* M

Définition 2. *Soit* (M, d) *et* (N, δ) *deux espaces métriques non bornés,* $f : M \to N$ *une application. Si* f *est injective, on note* f^{-1} *la réciproque de* $f : M \to f(M)$.
• *Pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*, on pose :*

$$\omega_f(t) = \sup\{\delta(f(x), f(y)); (x, y) \in M^2, d(x, y) \leq t\}.$$

On dit que f *est uniformément continue si* $\lim_{t \to 0} \omega_f(t) = 0$ *;*
• *on dit que* f *est un homéomorphisme uniforme si* f *est bijective et que* f *et* f^{-1} *sont uniformément continues ;*
• *on dit que* M *et* N *sont uniformément homéomorphes , et on note* $M \underset{UH}{\sim} N$ *s'il existe un homéomorphisme uniforme* $g : M \to N$ *;*
• *pour tout* $s \in \mathbb{R}^{+*}$*, on pose :*

$$\mathrm{Lip}_s(f) = \sup\left\{\frac{\delta(f(x), f(y))}{d(x, y)}; (x, y) \in M^2, d(x, y) \geq s\right\}$$

et $\mathrm{Lip}_\infty(f) = \inf_{s > 0} \mathrm{Lip}_s(f)$.
On dit que f *est grossièrement Lipschitzienne si* $\mathrm{Lip}_\infty(f) < \infty$ *;*
• *on dit que* M *et* N *sont Lipschitz-équivalents, et on note* $M \underset{L}{\sim} N$ *s'il existe une bijection* $f : M \to N$ *telle que* f *et* f^{-1} *soient Lipschitziennes ;*
• *on dit que* f *est une équivalence grossièrement Lipschitzienne si* f *est grossièrement Lipschitzienne et qu'il existe une application grossièrement Lipschitzienne* $g : N \to M$ *ainsi qu'une constante* $C > 0$ *vérifiant, pour tout* $(x, y) \in M \times N$ *:*

$$d(g \circ f(x), x) \leq C \text{ et } \delta(f \circ g(y), y) \leq C;$$

• *on dit que M et N sont grossièrement Lipschitz-équivalents, et on note $M \underset{CL}{\sim} N$ s'il existe une équivalence grossièrement Lipschitzienne $f : M \to N$;*
• *on dit que f est un plongement Lipschitzien si f est injective et que f et f^{-1} sont Lipschitziennes ;*
• *on dit que f est un plongement grossièrement Lipschitzien si $f : M \to f(M)$ est une équivalence grossièrement Lipschitzienne ;*
• *on dit que M se plonge Lipschitz (respectivement grossièrement Lipschitz) dans N, et on note $M \underset{L}{\hookrightarrow} N$ (respectivement $M \underset{CL}{\hookrightarrow} N$) s'il existe un plongement Lipschitzien (respectivement grossièrement Lipschitzien) $g : M \to N$;*
• *on dit que M et N sont réseaux-équivalents, et on note $M \underset{N}{\sim} N$ s'il existe un réseau $\mathcal{N}_M$ de M et un réseau $\mathcal{N}_N$ de N tels que $\mathcal{N}_M \underset{L}{\sim} \mathcal{N}_N$.*

D'après la proposition suivante, l'équivalence de réseaux entre espaces de Banach de dimension infinie ne dépend pas des réseaux choisis.

Proposition 1. *Dans un espace de Banach de dimension infinie, deux réseaux sont toujours Lipschitz-équivalents.*

Définissons désormais les plongements linéaires.

Définition 3. *Soit X, Y deux espaces vectoriels normés, $T : X \to Y$ une application. Si T est injective, on note T^{-1} la réciproque de $T : X \to T(X)$.*
• *On dit que T est un plongement linéaire si T est injective et que T et T^{-1} sont linéaires continues ;*
• *on dit que T est un plongement isométrique si T est injective et que T et T^{-1} sont des isométries linéaires.*

Notations 3. *Soit X, Y deux espaces vectoriels normés, $\lambda \in R^{+*}$.*
• *On note $X \simeq Y$ si X est Y sont linéairement isomorphes, $X \equiv Y$ si X et Y sont linéairement isométriques ;*
• *on note $X \overset{\lambda}{\simeq} Y$ s'il existe un isomorphisme linéaire $T : X \to Y$ vérifiant $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$.*

Remarque 1. • *Si M est métriquement convexe, toute application uniformément continue de M dans N est grossièrement Lipschitzienne. Par conséquent, un homéomorphisme uniforme entre deux espaces vectoriels normés est une bijection grossièrement Lipschitzienne de réciproque grossièrement Lipschitzienne.*
• *On note que l'application $s \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathrm{Lip}_s(f)$ est clairement décroissante.*

On utilisera régulièrement le résultat suivant concernant les applications grossièrement Lipschitziennes :

Proposition 2. *Soit X, Y deux espaces de Banach, $f : X \to Y$ une application.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) l'application f est grossièrement Lipschitzienne ;
(ii) il existe $A, \theta \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| \geq \theta \implies \|f(x)-f(y)\| \leq A\|x-y\|;$$

(iii) il existe $A, B \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|f(x)-f(y)\| \leq A\|x-y\| + B.$$

Démonstration. L'équivalence $(i) \iff (ii)$ et l'implication $(iii) \implies (ii)$ sont claires.
Montrons que $(ii) \implies (iii)$.
Supposons qu'il existe $A, \theta \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| \geq \theta \implies \|f(x)-f(y)\| \leq A\|x-y\|.$$

Soit $(x,y) \in X^2$. Si $\|x-y\| \geq \theta$, alors, pour tout $B \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\|f(x)-f(y)\| \leq A\|x-y\| + B.$$

Supposons donc $\|x-y\| < \theta$. Comme X est un espace de Banach, il existe $z \in X$ vérifiant $\|y-z\| = 2\theta$. En particulier, $\|x-z\| > \theta$. On a donc :

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\overset{\text{IT}}{\leq} \|f(x)-f(z)\| + \|f(z)-f(y)\| \leq A\|x-z\| + A\|y-z\| \\ &\overset{\text{IT}}{\leq} A\|x-y\| + 2A\|y-z\| = A\|x-y\| + 4A\theta\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

On peut montrer un résultat similaire pour les plongements grossièrement Lipschitziens (cf [6]) :

Proposition 3. *Soit X, Y deux espaces de Banach, $f : X \to Y$ une application.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) l'application f est un plongement grossièrement Lipschitzien ;
(ii) il existe $A, B, \theta \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| \geq \theta \implies A\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq B\|x-y\|;$$

(iii) il existe $A, B, C, D \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall (x,y) \in X^2, A\|x-y\| - B \leq \|f(x)-f(y)\| \leq C\|x-y\| + D.$$

Notons que l'on a également la proposition suivante :

Proposition 4. *Soit X, Y deux espaces de Banach de dimension infinie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $X \underset{CL}{\sim} Y$;
(ii) tout réseau de X est Lipschitz-isomorphe à tout réseau de Y.
En particulier, si $X \underset{UH}{\sim} Y$, deux conditions sont vérifiées.

Dans la définition de plongement grossièrement Lipschitzien, on ne demande pas à l'application d'être continue. Nous allons voir ci-dessous que ce n'est pas un problème. Pour cela, on introduit les partitions de l'unité.

Définition 4. *Soit X un espace topologique. On appelle partition de l'unité sur X toute famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions continues de X dans $[0,1]$ vérifiant :*
(i) la famille $(\mathrm{Supp}(\varphi_i))_{i\in I}$ est localement finie ;
(ii) pour tout $x \in X$, $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$.
Si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, on dit que $(\varphi_i)_{i\in I}$ est subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ si, pour tout $i \in I$, $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$.

On dispose du résultat ci-dessous concernant les partitions de l'unité, dont on pourra trouver une démonstration dans [25].

Proposition 5. *Soit X un espace topologique. Si X est métrisable, alors, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe une partition de l'unité sur X subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$.*

Ce résultat nous permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 6. *Soit X, Y deux espaces de Banach.*
S'il existe un plongement grossièrement Lipschitzien de X dans Y, alors il existe un plongement grossièrement Lipschitzien continu de X dans Y.

Démonstration. Supposons qu'il existe un plongement grossièrement Lipschitzien de X dans Y. Il existe alors une application $f : X \to Y$ et deux constantes $A, C \in \mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| \geq A \implies \|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq C\|x-y\|.$$

Notons $N = (x_i)_{i\in I}$ un A-réseau de X. Pour tout $x \in X$, pour tout $r > 0$, notons $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon r.
D'après la proposition 5, il existe une partition de l'unité $(f_i)_{i\in I}$ sur X subordonnée au recouvrement ouvert $(B(x_i, A))_{i\in I}$.
L'application $g = \sum_{i\in I} f(x_i) f_i$ est continue. Montrons que c'est un plongement grossièrement Lipschitzien.
Soit $(x,y) \in X^2$ tel que $\|x-y\| \geq 2A$. Il existe $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $x \in B(x_i, A)$ et $y \in B(x_j, A)$. On note que :

$$\|g(x) - f(x_i)\| = \left\| \sum_{k\in I} (f(x_k) - f(x_i)) f_k(x) \right\| \leq C \times 2A.$$

De même, $\|g(y) - f(x_j)\| \leq 2CA$.
Comme $\|f(x_i) - f(x_j)\| \leq C\|x_i - x_j\| \leq 2CA + C\|x-y\|$, on a :

$$\|g(x) - g(y)\| \leq C\|x-y\| + 6CA.$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned}\|g(x)-g(y)\| &\geq \|f(x_i) - f(x_j)\| - \|g(x) - f(x_i)\| - \|g(y) - f(x_j)\| \\ &\geq \|x-y\| - \|x-x_i\| - \|y-x_j\| - 4CA \\ &\geq \|x-y\| - 2(1+2C)A\end{aligned}$$

pour conclure. □

1.3 Sommes ℓ_p d'espaces de Banach

Introduisons dans cette partie les sommes ℓ_p d'espaces de Banach.

Notations 4. • *Soit $((X_n, \|.\|_{X_n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de Banach.*
$*$ *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note :*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n ; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < +\infty \right\}$$

muni de la norme :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} , \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$*$ *Notons également :*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_\infty} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n ; \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|x_n\|_{X_n} < +\infty\right\}$$

muni de la norme :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_\infty} , \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|x_n\|_{X_n}.$$

• *Si tous les espaces X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont égaux à un même espace de Banach X, on utilisera plutôt les notations $\ell_p(X)$, $1 \leq p < +\infty$, et $\ell_\infty(X)$.*

Tous les espaces introduits dans la notation précédente sont des espaces de Banach. Les deux résultats suivants permettent d'en dire plus sur la dualité de ce type d'espaces.

Proposition 7. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de Banach, $p \in [1, +\infty[$, q son exposant conjugué.*
L'application J définie par :

$$J : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q} & \to & \left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}\right)^* \\ y = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & J_y : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est une isométrie linéaire surjective.

Démonstration. • Commençons par voir que l'application J est bien définie.
Pour tout $y = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}$, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_{X_n^*}\|x_n\|_{X_n} \leq \|y\|_q\|x\|_p$$

donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^*(x_n)$ converge, J_y est bien définie et, comme J_y est linéaire, J est bien définie.
• L'application J est clairement linéaire. Montrons que c'est une isométrie.
Soit $y = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}$. On a déjà $\|J_y\| \leq \|y\|_q$ d'après ce qui précède.
Si $y = 0$, le résultat est immédiat donc on peut supposer $\|y\|_q > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $x \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} \setminus\{0\}$ vérifiant $|J_y(x)| \geq \|x\|_p \left(\|y\|_q - \dfrac{\varepsilon}{\|y\|_q^{q/p}}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\tilde{x_n} = 0$ si $x_n^* = 0$; sinon il existe $\tilde{x_n} \in S_{X_n}$ tel que $x_n^*(\tilde{x_n}) \in \mathbb{R}^+$ et $x_n^*(\tilde{x_n}) \geq \|x_n^*\|_{X_n^*} - \dfrac{\varepsilon}{2^n \|x_n^*\|_{X_n^*}^{q-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = \|x_n^*\|_{X_n^*}^{q-1} \tilde{x_n}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie appartient à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ car :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_{X_n^*}^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_{X_n^*}^q = \|y\|_q^q < +\infty.$$

et $\|x\|_p = \|y\|_q^{q/p} > 0$.
Il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned} |J_y(x)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_{X_n^*}^{q-1} x_n^*(\tilde{x_n}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|_{X_n^*}^q - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \|y\|_q^q - \varepsilon = \|x\|_p \left(\|y\|_q - \frac{\varepsilon}{\|y\|_q^{q/p}} \right) \end{aligned}$$

pour conclure que J est bien une isométrie linéaire.
• Montrons pour finir que J est surjective.
Soit $\delta \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^*$. Si $\delta = 0$, on a $\delta = J(0)$. Supposons donc $\delta \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x_n^* : \left\{ \begin{array}{lll} X_n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \delta((0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x}, 0, \cdots, 0, \cdots) \end{array} \right.$ appartient à X_n^*.
Montrons que $y = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}$ et que $J(y) = \delta$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = 0$ si $x_n^* = 0$; sinon, il existe $x_n \in S_{X_n}$ tel que $x_n^*(x_n) \in \mathbb{R}^+$ et $x_n^*(x_n) \geq \|x_n^*\|_{X_n^*} - \dfrac{\varepsilon}{2^n \|x_n^*\|_{X_n^*}^{q-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$z^{(n)} = (\|x_1^*\|_{X_1^*}^{q-1} x_1, \cdots, \|x_n^*\|_{X_n^*}^{q-1} x_n, 0, \cdots, 0, \cdots) \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\|\delta\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_n^*}^q\right)^{\frac{1}{p}} = \|\delta\| \|z^{(n)}\|_p \geq |\delta(z^{(n)})| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_k^*}^{q-1} x_k^*(x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_k^*}^q - \varepsilon$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_k^*} - \varepsilon \leq \|\delta\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_k^*}^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k^*\|_{X_k^*}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\delta\|.$$

On en déduit que $y = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}$.

De plus, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$, on a, comme $\delta \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^*$:

$$J(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta((0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n^e \text{ position}}}{x_n},0,\cdots,0,\cdots)) = \delta(x)$$

d'où $J(y) = \delta$, ce qui assure que J est surjective.

Donc J est bien une isométrie linéaire surjective. $\square$

Corollaire 3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de Banach réflexifs, $p \in]1,+\infty[$.*
L'espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ est réflexif.

Démonstration. Notons $q \in]1,+\infty[$ l'exposant conjugué de p.

D'après la proposition 7, les applications $\psi : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^* \\ (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} & \to & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \end{array}\right. \end{array}\right.$

et $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^{**}\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}^* \\ (x_n^{**})_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q} & \to & \mathbb{R} \\ (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(x_n^*) \end{array}\right. \end{array}\right.$ sont des isométries linéaires surjectives.

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'isométrie linéaire $\Pi_{X_n} : \left\{\begin{array}{ccc} X_n & \to & X_n^{**} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} X_n^* & \to & \mathbb{R} \\ x^* & \mapsto & x^*(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$ est surjective.

On veut montrer que l'isométrie linéaire $\Pi : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^{**} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^* & \to & \mathbb{R} \\ x^* & \mapsto & x^*(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$

est surjective.

Posons $\Delta : \left\{\begin{array}{ccc} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n^*\right)_{\ell_q}^* \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \phi((\Pi_{X_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}) \end{array}\right.$.

L'application Δ est une isométrie linéaire surjective en tant que composée d'isométries linéaires surjectives.

Il suffit alors de montrer que $\Pi = (\psi^*)^{-1} \circ \Delta = (\psi^{-1})^* \circ \Delta$. Or, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$, pour tout $\delta \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}^*$, d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
\left((\psi^*)^{-1} \circ \Delta(x)\right)(\delta) &= \Delta(x)\left(\psi^{-1}(\delta)\right) = \phi((\Pi_{X_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*})\left(\psi^{-1}(\delta)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \Pi_{X_n}(x_n), \psi^{-1}(\delta)_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{-1}(\delta)_n(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta((0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^e \text{ position}}}{x_n}, 0, \cdots, 0, \cdots)) = \delta(x) \\
&= \Pi(x)(\delta)
\end{aligned}$$

d'où $\Pi = (\psi^*)^{-1} \circ \Delta$ est une isométrie linéaire surjective, ce qui assure que $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ est réflexif. □

1.4 Fonctions d'Orlicz, espaces de suites Orlicz, normes itérées

Dans les parties 2 et 3, nous aurons besoin des notions d'espaces de suites d'Orlicz et de normes itérées, que nous allons introduire dans cette sous-partie.
Commençons par donner la définition de norme absolue ainsi qu'une autre définition équivalente.

Définition 5. *On dit qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ est absolue si, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $N(a, b) = N(|a|, |b|)$.*

Remarque 2. *Une norme étant une application convexe et la boule unité de ℓ_∞^2 étant l'enveloppe convexe de $\{-1, 1\}^2$, on en déduit qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ est absolue si et seulement si elle vérifie :*

$$\forall (a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4, |a_1| \leq |a_2|, |b_1| \leq |b_2| \implies N(a_1, b_1) \leq N(a_2, b_2).$$

Introduisons désormais les fonctions d'Orlicz et les espaces de suites d'Orlicz.

Définition 6. *Une fonction d'Orlicz est une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante, convexe, vérifiant $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.*

Dans la suite, on ne considérera que des fonctions d'Orlicz non-dégénérées (une fonction d'Orlicz $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est dite non-dégénérée si, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(t) > 0$).

Définition 7. *Soit F une fonction d'Orlicz. L'espace :*

$$\ell_F = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}; \exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{|a_n|}{\lambda}\right) < +\infty\right\}$$

muni de la norme de Luxembourg :

$$\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_F, \|a\|_{\ell_F} = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}^{+*}; \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{|a_n|}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

est un espace de Banach appelé espace de suites d'Orlicz.

Pour toute fonction d'Orlicz Lipschitzienne F, la fonction $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est croissante majorée donc admet une limite $\theta > 0$ en $+\infty$, et on peut (cf [19]) définir une norme absolue associée à F par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, N_F(a,b) = \begin{cases} |a| \left(1 + F\left(\frac{|b|}{|a|}\right)\right) & si \quad a \neq 0 \\ \theta |b| & sinon \end{cases}.$$

Définissons pour finir les normes itérées ainsi que les bases inconditionnelles.

Définition 8. *Soit N une norme absolue sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $N(0,1) = 1$. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de c_{00}.*
On définit l'espace de suites Λ_N comme la complétion de c_{00} avec la norme définie de façon itérative par : $\|e_1\|_{\Lambda_N} = 1$ et

$$\forall n \geq 2, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_{\Lambda_N} = N \left(\left\| \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j \right\|_{\Lambda_N}, a_n \right).$$

Définition 9. *Une base $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'un espace de Banach X est dite inconditionnelle si, pour tout $x \in X$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^*(x) u_n$ converge inconditionnellement, avec $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des applications coordonnées.*

On a le résultat suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans [1] :

Proposition 8. *Une base $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'un espace de Banach X est inconditionnelle si et seulement s'il existe une constante $K \geq 1$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_N) \in \mathbb{R}^{2N}$, on ait :*

$$(\forall i \in [|1, N|], |a_i| \leq |b_i|) \implies \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i u_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{N} b_i u_i \right\|.$$

On utilisera régulièrement le fait suivant :

Remarque 3. *La base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Λ_N est inconditionnelle.*

Dans la suite, N désigne une norme absolue sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $N(0,1) = 1$.
Notons $F = N(1, \cdot) - 1$.
L'espace Λ_N coïncide avec la fermeture de c_{00} dans l'espace de suites d'Orlicz ℓ_F. On a même plus, comme le montre le lemme 2. Pour prouver ce lemme, nous aurons besoin du résultat intermédiaire ci-dessous.

Posons $C_F = \inf\limits_{t>0} \frac{1+F(t)}{t} > 0$, $D_F = \max(1, N(0,1))$.

Lemme 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_{i+1} \right\|_{\Lambda_N} \leq D_F \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N}.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : pour tout $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_{i+1} \right\|_{\Lambda_N} \leq D_F \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N}.$$

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|ae_2\|_{\Lambda_N} = |a|N(0,1) = \|ae_1\|_{\Lambda_N} N(0,1) \leq D_F \|ae_1\|_{\Lambda_N}$$

donc H_1 est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Soit $(a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_{i+1} \right\|_{\Lambda_N} &= N\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_{i+1} \right\|_{\Lambda_N}, |a_{n+1}| \right) \\
&\leq N\left(D_F \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N}, D_F |a_{n+1}| \right) \text{ par } H_n \text{ et car } D_F \geq 1 \\
&= D_F \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N}
\end{aligned}$$

donc H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence permet de conclure. □

Lemme 2. *Pour tout $a \in c_{00}$, on a :*

$$\frac{1}{2D_F} \|a\|_{\ell_F} \leq \|a\|_{\Lambda_N} \leq e \max\left(1, \frac{1}{C_F}\right) \|a\|_{\ell_F}.$$

Démonstration. Soit $(a_n, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
• Supposons que $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\ell_F} = 1$. En particulier, on a $\prod_{i=1}^{n} (1 + F(|a_i|)) \leq e$.
Montrons que $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N} \leq e \max\left(1, \frac{1}{C_F}\right)$.
∗ Si $|a_1| \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N} &\leq \left\| e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N} \\
&\leq \left\| e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N} (1 + F(|a_n|)) \text{ car } \left\| e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i \right\|_{\Lambda_N} \geq \|e_1\|_{\Lambda_N} \geq 1 \\
&\leq \cdots \leq \|e_1\|_{\Lambda_N} \prod_{i=2}^{n} (1 + F(|a_i|)) \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} (1 + F(|a_i|)) \leq e.
\end{aligned}$$

Si $|a_1| \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_{\Lambda_N} &\leq \left\|a_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i\right\|_{\Lambda_N} (1 + F(|a_n|)) \text{ car } \left\|a_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i\right\|_{\Lambda_N} \geq \|a_1 e_1\|_{\Lambda_N} \geq 1 \\
&\leq \cdots \leq \|a_1 e_1\|_{\Lambda_N} \prod_{i=2}^{n} (1 + F(|a_i|)) \\
&\leq \frac{1}{C_F} \prod_{i=1}^{n} (1 + F(|a_i|)) \leq \frac{e}{C_F}
\end{aligned}$$

d'où le côté droit de l'inégalité.

• Supposons désormais $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_{\Lambda_N} = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
2 = 1 + &\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right\|_{\Lambda_N} \\
&\overset{\text{IT}}{\geq} \left\|e_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{D_F} e_{j+1}\right\|_{\Lambda_N} \quad \text{d'après le lemme précédent} \\
&= \left\|e_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{D_F} e_{j+1}\right\|_{\Lambda_N} \left[1 + F\left(\frac{|a_n|}{D_F \left\|e_1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{D_F} e_{j+1}\right\|_{\Lambda_N}}\right)\right] \\
&\geq \left\|e_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{D_F} e_{j+1}\right\|_{\Lambda_N} \left[1 + F\left(\frac{|a_n|}{2D_F}\right)\right] \\
&\geq \cdots \geq \prod_{j=1}^{n} \left(1 + F\left(\frac{|a_j|}{2D_F}\right)\right) \\
&\geq 1 + \sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{|a_j|}{2D_F}\right)
\end{aligned}$$

donc $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|_{\ell_F} \leq 2D_F$, d'où le résultat. $\square$

1.5 Modules de lissité asymptotique et de convexité asymptotique

Introduisons ici les modules de lissité asymptotique et de convexité asymptotique.

Définition 10. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.*
$*$ *Pour tous $x \in S_X$, $t \in \mathbb{R}^+$, Y sous-espace de X de codimension finie, on pose :*

$$\overline{\rho}_X(t, x, Y) = \sup_{y \in S_Y} \|x + ty\| - 1 \ \text{ et } \overline{\delta}_X(t, x, Y) = \inf_{y \in S_Y} \|x + ty\| - 1;$$

$*$ *Pour tous $x \in S_X$, $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :*

$$\overline{\rho}_X(t,x) = \inf\{\overline{\rho}_X(t,x,Y), Y \text{ sous-espace fermé de } X \text{ de codimension finie}\}$$

et :

$$\overline{\delta}_X(t,x) = \sup\{\overline{\delta}_X(t,x,Y), Y \text{ sous-espace fermé de } X \text{ de codimension finie}\};$$

$*$ *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\overline{\rho}_X(t) = \sup\limits_{x \in S_X} \overline{\rho}_X(t,x)$ et $\overline{\delta}_X(t) = \inf\limits_{x \in S_X} \overline{\delta}_X(t,x)$.*

L'application $\overline{\rho}_X$ est appelée module de lissité asymptotique de X et $\overline{\delta}_X$ est appelée module de convexité asymptotique de X.

Définition 11. *Soit X un espace de Banach.*

- *On dit que X est asymptotiquement uniformément lisse (AUS) si $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\overline{\rho}_X(t)}{t} = 0$;*
- *Soit $p \in [1,+\infty[$. On dit que X est p-AUS s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $\overline{\rho}_X(t) \leq Ct^p$;*
- *On dit que X est asymptotiquement uniformément convexe (AUC) si, pour tout $t \in]0,1[$, $\overline{\delta}_X(t) > 0$;*
- *Soit $p \in [1,+\infty[$. On dit que X est p-AUC s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, $\overline{\delta}_X(t) \geq Ct^p$;*

Montrons quelques propriétés dont disposent ces modules.

Proposition 9. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach de dimension infinie, $t > 0$. On a :*

$$0 \leq \overline{\delta}_X(t) \leq \overline{\rho}_X(t) \leq t$$

et $t - 1 \leq \overline{\rho}_X(t)$.

Démonstration. • Les inégalités $\overline{\delta}_X(t) \leq \overline{\rho}_X(t) \leq t$ sont claires (l'intersection de deux espaces de codimension finie de X n'est pas réduite à $\{0\}$).

• Notons $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de X de codimension finie.

$*$ Commençons par montrer que $\inf\limits_{x \in S_X} \sup\limits_{Y \in \mathcal{E}} \inf\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\| \geq 1$.

Soit $x \in S_X$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x^* \in S_{X^*}$ tel que $x^*(x) = 1$.
Posons $Y = \ker(x^*) \in \mathcal{E}$. On a alors :

$$\forall y \in S_Y, \|x + ty\| \geq x^*(x + ty) = 1$$

d'où $\inf\limits_{x \in S_X} \sup\limits_{Y \in \mathcal{E}} \inf\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\| \geq 1$.

$*$ Montrons désormais que $\sup\limits_{x \in S_X} \inf\limits_{Y \in \mathcal{E}} \sup\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\| \geq t$.

Soit $x \in S_X$, $Y \in \mathcal{E}$. On peut supposer $Y \neq X$ et $Y \neq \mathbb{R}x$. Il existe un sous-espace vectoriel Z de X, de dimension finie, vérifiant $X = Y \oplus Z$. Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de Z et $Z' = \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_n, x\}$. D'après le lemme de Riesz, il existe $y \in S_Y$ tel que $d(y, Z') \geq 2$. D'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in X^*$ tel que $\varphi(y) = 1$, $Z' \subset \ker(\varphi)$ et :

$$\|\varphi\| = \frac{1}{d(y, Z')} \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

On a alors $t = \varphi(x + ty) \leq \|\varphi\|\|x - ty\| \leq \|x + ty\|$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 10. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in X$, Y un sous-espace vectoriel fermé de X de codimension finie.*
On a :

$$\sup_{y \in S_Y} \|x + ty\| = \sup_{y \in B_Y} \|x + ty\|.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\sup\limits_{y \in B_Y} \|x + ty\| \leq \sup\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\|$, l'autre inégalité étant immédiate.
Pour cela, supposons que $A = \sup\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\| < \sup\limits_{y \in B_Y} \|x + ty\|$.
• Montrons que $A \geq \|x\|$.
Il existe $x^* \in S_{X^*}$ tel que $x^*(x) = \|x\|$ et il existe $y \in S_Y$ tel que $x^*(y) \geq 0$. On a alors :

$$A \geq \|x + ty\| \geq x^*(x + ty) \geq \|x\|.$$

• Donc, par hypothèse, il existe $y \in \overset{\circ}{B}_Y \setminus \{0\}$ tel que $\|x + ty\| > A$. On a :

$$\left\| x + t\frac{y}{\|y\|} \right\| \leq A \text{ et } \left\| \frac{x}{\|y\|} + t\frac{y}{\|y\|} \right\| > \frac{A}{\|y\|}$$

d'où :

$$\left(\frac{1}{\|y\|} - 1 \right) A < \left\| \frac{x}{\|y\|} + t\frac{y}{\|y\|} \right\| - \left\| x + t\frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left(\frac{1}{\|y\|} - 1 \right) \|x\|.$$

Or $\|y\| < 1$ donc $A < \|x\|$, ce qui est absurde, d'où le résultat. □

Proposition 11. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.*
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_X(t) &= \sup_{x \in B_X} \inf_{Y \in \mathcal{E}} \sup_{y \in S_Y} \|x + ty\| - 1 \\ &= \sup_{x \in B_X} \inf_{Y \in \mathcal{E}} \sup_{y \in B_Y} \|x + ty\| - 1 \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de X de codimension finie.

Démonstration. La deuxième égalité vient de la proposition précédente.
Il suffit de montrer que, pour tout $x \in B_X$, on a :

$$\inf_{Y \in \mathcal{E}} \sup_{y \in S_Y} \|x + ty\| \leq \overline{\rho}_X(t) + 1.$$

Soit $x \in B_X$.
• Si $x = 0$, on a bien $\inf\limits_{Y \in \mathcal{E}} \sup\limits_{y \in S_Y} \|x + ty\| = t \leq \overline{\rho}_X(t) + 1$.
• Supposons donc $x \neq 0$. Soit $y \in Y$.
Montrons que la fonction $f : s \mapsto \max(\|sx + y\|, \|sx - y\|)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $0 < s_1 < s_2$. On peut supposer $\|s_1 x + y\| \geq \|s_1 x - y\|$.
Il existe $x^* \in S_{X^*}$ tel que $x^*(s_1 x + y) = \|s_1 x + y\|$.
On a $x^*(x) \geq 0$ car, si on avait $x^*(x) < 0$, on aurait :

$$0 > 2x^*(s_1 x) = x^*(s_1 x + y + s_1 x - y) = x^*(s_1 x + y) + x^*(s_1 x - y)$$

et par conséquent :

$$\|s_1x+y\| \geq \|s_1x-y\| \geq (-x^*)(s_1x-y) > x^*(s_1x+y) = \|s_1x+y\|.$$

On a donc :

$$f(s_1) = s_1x^*(x) + x^*(y) \leq s_2x^*(x) + x^*(y) = x^*(s_2x+y) \leq \|s_2x+y\| \leq f(s_2)$$

ce qui assure la croissance de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En particulier, comme $x \in B_X \setminus \{0\}$, on a $\frac{1}{\|x\|} \geq 1$ donc :

$$\begin{aligned}\inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| &= \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \max(\|x+ty\|, \|x-ty\|) \\ &\leq \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \max\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}+ty\right\|, \left\|\frac{x}{\|x\|}-ty\right\|\right) \\ &= \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \left\|\frac{x}{\|x\|}+ty\right\| \\ &\leq \overline{\rho}_X(t)+1\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Remarque 4. *De même, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{\substack{y\in Y\\ \|y\|\geq 1}} \|x+ty\| - 1.$$

Proposition 12. *Soit X un espace de Banach.*
Les applications $\overline{\rho}_X$ et $\overline{\delta}_X$ sont croissantes.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $h > 0$.
Pour tout $y \in B_Y$, $\frac{t}{t+h}y \in B_Y$ donc :

$$\sup_{y\in B_Y} \|x+ty\| = \sup_{y\in B_Y} \left\|x+(t+h)\frac{t}{t+h}y\right\| \leq \sup_{y\in B_Y} \|x+(t+h)y\|$$

d'où $\overline{\rho}_X(t) \leq \overline{\rho}_X(t+h)$, ce qui conclut.
On montre de la même manière la croissante de $\overline{\delta}_X$. □

Remarque 5. *De même, l'application $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\overline{\delta}_X(t)}{t}$ est croissante, ce qui permet de définir la fonction convexe suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \tilde{\delta}_X(t) = \int_0^t \frac{\overline{\delta}_X(s)}{s} ds.$$

Comme, pour tout $t > 0$, on a $\overline{\delta}_X\left(\frac{t}{2}\right) \leq \tilde{\delta}_X(t) \leq \overline{\delta}_X(t)$, $\overline{\delta}_X$ est équivalente à une fonction convexe.

Proposition 13. *Soit X un espace de Banach.*
Les applications $\overline{\rho}_X$ et $\overline{\delta}_X$ sont 1-Lipschitziennes.

Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de X de codimension finie.
Il suffit de remarquer que, pour tous $t, h \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{\rho}_X(t+h) - \overline{\rho}_X(t) &= \sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+(t+h)y\| - \sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| \\ &\leq \sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| + h - \sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| \leq h \end{aligned}$$

Ceci montre que le résultat pour $\overline{\rho}_X$.
De même,

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_X(t+h) - \overline{\delta}_X(t) &= \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+(t+h)y\| - \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| \\ &\leq \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| + h - \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| \leq h \end{aligned}$$

et comme :

$$\forall x, y \in X, \forall t, h \in \mathbb{R}^+, \|x+(t+h)y\| \geq \|x+ty\| - h$$

on a :

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_X(t) - \overline{\delta}_X(t+h) &= \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| - \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+(t+h)y\| \\ &\leq \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\| - \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\| + h \leq h \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Remarque 6. *On note alors que la fonction $\overline{\rho}_X$ est une fonction d'Orlicz.*

Lorsque le dual est séparable, il est plus aisé de calculer ces modules, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 14. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach dont le dual est séparable.*
Pour tous $t \in [0,1]$, $x \in S_X$, on pose :

$$\eta(t,x) = \sup \left\{ \limsup_{n\to\infty} \|x+x_n\| - 1; (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_X, x_n \xrightarrow{\omega} 0 \right\}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in S_X$, on a :

$$\eta(t,x) = \overline{\rho}_X(t,x) \text{ puis } \sup_{x\in S_X} \eta(t,x) = \overline{\rho}_X(t).$$

Démonstration. Soit $t \in [0,1]$, $x \in S_X$.
• Montrons que $\eta(t,x) \leq \overline{\rho}_X(t,x)$.
Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\eta(t,x) \leq \overline{\rho}_X(t+\varepsilon, x) + \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_X$ une suite faiblement nulle.
Soit Y un sous-espace vectoriel fermé de X de codimension finie. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, Y) = 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, il existe $y_n \in Y$ vérifiant $\|x_n - y_n\| < \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $\|y_n\| < t + \varepsilon$ d'où :

$$\forall n \geq n_0, \|x+x_n\| - 1 \leq \|x+y_n\| - 1 + \|x_n - y_n\| \leq \overline{\rho}_X(t+\varepsilon, x, Y) + \varepsilon.$$

On a donc bien $\eta(t,x) \leq \overline{\rho}_X(t+\varepsilon,x)+\varepsilon$.
• Montrons que $\overline{\rho}_X(t,x) \leq \eta(t,x)$.
Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\eta(t,x) \geq \overline{\rho}_X(t,x)+\varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, il existe une suite $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X^*$ dense dans X^*.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Y_n = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(x_j^*)$, sous-espace vectoriel fermé de X de codimension finie.
Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in tS_{Y_n}$ vérifiant :

$$\|x+x_n\| - 1 \geq \overline{\rho}_X(t,x,Y_n) - \varepsilon \geq \overline{\rho}_X(t,x) - \varepsilon.$$

On note que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle d'où $\eta(t,x) \geq \overline{\rho}_X(t,x)+\varepsilon$.
Donc, pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in S_X$, on a :

$$\eta(t,x) = \overline{\rho}_X(t,x) \text{ et } \sup_{x\in S_X} \eta(t,x) = \sup_{x\in S_X} \overline{\rho}_X(t,x) = \overline{\rho}_X(t).$$

□

Remarque 7. • *On pourrait montrer de même que, si X est un espace de Banach dont le dual est séparable, pour tout $t \in [0,1]$, on a :*

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{x\in S_X} \inf \left\{ \liminf_{n\to\infty} \|x+x_n\| - 1 ; (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_X, x_n \xrightarrow{\omega} 0 \right\}.$$

• *Notons que* $\eta(t,x) = \sup \left\{ \limsup_{n\to\infty} \|x+x_n\| - 1 ; (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tB_X, x_n \xrightarrow{\omega} 0 \right\}$.

Avec cette remarque, on note que la proposition suivante a été démontrée :

Proposition 15. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $x \in S_X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite faiblement nulle. On a :*

$$\limsup \|x+x_n\| \leq 1 + \overline{\rho}_X(\limsup \|x_n\|).$$

Pour finir, dans le cas où $X = \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$, ou $X = c_0$, on connait la valeur explicite des modules.

Proposition 16. • *Soit $1 \leq p < +\infty$, $X = \ell_p$, $t > 0$. On a :*

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1.$$

• *Pour tout $t \in [0,1]$, $\overline{\rho}_{c_0}(t) = \overline{\delta}_{c_0}(t) = 0$.*

Démonstration. • Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces fermés de X de codimension finie, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de X.
Il s'agit de montrer que :

$$\sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p \leq (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$$

et :

$$(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \leq \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p.$$

$*$ Commençons par montrer que $\sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p \leq (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$(1+(\varepsilon'+t)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (1+t^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

Soit $x \in S_X$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon'$.
Posons alors $Y = \overline{\mathrm{Vect}}\{e_k, k > n_0\} \in \mathcal{E}$. Pour tout $y \in S_Y$, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+ty\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n_0} |x_k|^p + \left[\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k+ty_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&\leq \|x\|_p^p + \left[\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + t\|y\|_p\right]^p \\
&\leq 1 + (\varepsilon'+t)^p
\end{aligned}$$

donc $\|x+ty\|_p \leq (1+t^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\sup_{x\in S_X} \inf_{Y\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p \leq (1+t^p)^{\frac{1}{p}}.$$

$*$ Montrons ensuite que $(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \leq \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varepsilon' > 0$ tel que :

$$(1-\varepsilon'+(t-\varepsilon'^{\frac{1}{p}})^p)^{\frac{1}{p}} \geq (1+t^p)^{\frac{1}{p}} - \varepsilon.$$

Soit $x \in S_X$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \leq \varepsilon'$.
Posons alors $Y = \overline{\mathrm{Vect}}\{e_k, k > n_0\} \in \mathcal{E}$. Pour tout $y \in S_Y$, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+ty\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n_0} |x_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k+ty_k|^p \\
&\geq 1 - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p + \left(t\|y\|_p - \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \\
&\geq 1 - \varepsilon' + (t-\varepsilon'^{\frac{1}{p}})^p
\end{aligned}$$

donc $\|x+ty\|_p \geq (1+t^p)^{\frac{1}{p}} - \varepsilon$, ce qui prouve que :

$$(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \leq \inf_{x\in S_X} \sup_{Y\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_Y} \|x+ty\|_p.$$

• Appliquons la proposition 14.
Soit $t \in [0,1[$. D'après la proposition 14, on a :

$$\overline{\rho}_{c_0}(t) = \sup_{x\in S_{c_0}} \eta(t,x)$$

où, pour tout $x \in S_{c_0}$:

$$\eta(t,x) = \sup\left\{\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\|_\infty - 1 ; (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_{c_0}, x_n \xrightarrow{\omega} 0\right\}.$$

Montrons donc que, pour tout $x \in S_{c_0}$, $\eta(t,x) = 0$. Soit $x \in S_{c_0}$.
Soit $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_{c_0}$ faiblement nulle.
Il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq K$, on ait $|x(k)| \leq 1-t$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $k \in [|1, K|]$, on ait $|x_n(k)| \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\|x + x_n\|_\infty - 1 \leq \varepsilon$$

d'où le résultat par continuité de $\overline{\rho}_{c_0}$ et la proposition 9. □

Remarque 8. *On montre de même que si $1 \leq p < +\infty$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'espaces vectoriels de dimension finie, alors $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$ vérifie :*

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1.$$

On en déduit en particulier que X est p-AUS et p-AUC.

1.6 Variables aléatoires p-stables

Rappelons que, pour toute variable aléatoire réelle X, la fonction caractéristique de X est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Montrons dans cette partie que, pour tous $1 \leq p < q < 2$, ℓ_q se plonge isométriquement dans L_p.

Nous aurons besoin du théorème suivant, dont on pourra trouver une preuve dans [26].

Théorème 2. *Soit $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*
Il existe une suite de variables aléatoires réelles indépendantes $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, définies sur l'espace probabilisé $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, X_j soit de loi μ_j.

Remarque 9. *C'est à Steinhaus que l'on doit la première présentation mathématique rigoureuse des suites de variables aléatoires indépendantes.*

Nous aurons également besoin du lemme de Lévy, démontré à la page 169 de [1].

Lemme 3 (Lévy). *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \phi_{\mu_n}(t) = F(t).$$

Il existe une probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi_\mu = F$.

Grâce à ces deux résultats, on peut montrer :

Théorème 3. *Soit* $0 < p < 2$.
Il existe une mesure de probabilité μ_p *sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{\mu_p}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_p(x) = e^{-|t|^p}.$$

Démonstration. • Posons $c_p = p \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{p+1}} du \in \mathbb{R}^{+*}$.
Montrons qu'il existe μ_p telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\mu_p}(t) = e^{-c_p|t|^p}$.
Notons X une variable aléatoire réelle, définie sur un espace probabilisé, admettant pour fonction de répartition la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \frac{p}{2|x|^{p+1}} (\mathbb{1}_{]-\infty,-1[} + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) &= \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{itx}}{(-x)^{p+1}} dx + \frac{p}{2} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^{p+1}} dx \\ &= p \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2x^{p+1}} dx = p \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^{p+1}} dx\end{aligned}$$

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$1 - \phi_X(t) = 1 - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^{p+1}} dx \overset{u=tx}{=} pt^p \int_t^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{p+1}} du.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, posons $\omega_p(t) = p \int_t^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{p+1}} du$. On note que $c_p = \lim\limits_{t \to 0^+} \omega_p(t)$.
Comme la fonction caractéristique de X est paire, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = 1 - |t|^p \omega_p(|t|).$$

Introduisons désormais une suite $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/p}}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_{S_n}(t) \overset{\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{p}}}\right) = \left(1 - \frac{|t|^p}{n} \omega_p\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{p}}}\right)\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-c_p|t|^p}.$$

Le lemme 3 assure qu'il existe μ_p telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\mu_p}(t) = e^{-c_p|t|^p}$.
• Si X est une variable aléatoire de loi μ_p, notons $\tilde{\mu_p}$ la loi de $Y = \frac{1}{c_p^{1/p}} X$. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_Y(t) = \phi_X\left(\frac{t}{c_p^{1/p}}\right) = e^{-|t|^p}$$

d'où le résultat. □

Ce théorème assure l'existence de variables p-stables, $0 < p < 2$, dont la définition est donnée ci-dessous.

Définition 12. *Soit $0 < p < 2$. Une variable aléatoire X est dite p-stable si :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = e^{-c_p|t|^p}$$

où c_p est une constante.
On dit que X est p-stable normalisée si $c_p = 1$.

Ces variables aléatoires ont la particularité suivante :

Proposition 17. *Soit $0 < p < 2$. Soit X une variable aléatoire p-stable sur un espace probabilisé (Ω, Σ, μ). On a :*
(i) Pour tout $0 < q < p$, $X \in L_q(\mu)$;
(ii) $X \notin L_p(\mu)$.

Démonstration. Notons μ_p la loi de X, c_p la constante associée au fait que X soit p-stable. Soit $q \in]0, p]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1 - \cos(tx)}{t^{1+q}} dt \overset{u=t|x|}{=} |x|^q \alpha_q \text{ où } \alpha_q = \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1 - \cos(u)}{u^{1+q}} du \in \mathbb{R}^{+*}$$

car $0 < q < 2$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|^q) &= \int_{\mathbb{R}} |x|^q d\mu_p(x) = \alpha_q^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1 - \cos(tx)}{t^{1+q}} dt d\mu_p(x) \\
&\overset{\text{FT}}{=} \alpha_q^{-1} \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1}{t^{1+q}} \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx)) d\mu_p(x) dt \\
&= \alpha_q^{-1} \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1}{t^{q+1}} (1 - Re(e^{-c_p|t|^p})) dt \\
&= \alpha_q^{-1} \int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{1 - e^{-c_p t^p}}{t^{q+1}} dt.
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1 - e^{-c_p t^p}}{t^{q+1}} \underset{t \to 0^+}{\sim} c_p \dfrac{1}{t^{q-p+1}}$ donc $X \in L_q(\mu)$ si et seulement si $q < p$. $\square$

Nous avons désormais tous les outils pour prouver le théorème recherché :

Théorème 4. *Pour tous $1 \leq p < q < 2$, ℓ_q se plonge isométriquement dans L_p.*

Démonstration. Soit $(f_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes q-stables normalisées sur $[0, 1]$. D'après la proposition précédente, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $f_j \in L_p$.
Notons $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ_q et posons :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}^*\} & \to & L_p \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i & \mapsto & \frac{1}{\|f_1\|_p} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i \end{array} \right. .$$

L'application φ est bien définie et linéaire. Montrons que c'est une isométrie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in S_{\ell_q^n}$, $h_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i$.
Par homogénéité, il suffit de montrer que $\|\varphi(a)\|_p = 1$ *i.e* $\|h_n\|_p = \|f_1\|_p$.
Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, grâce à l'indépendance de variables aléatoires, on a :

$$\phi_{h_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-|a_i|^q |t|^q} = \exp\left(-|t|^q \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right) = e^{-|t|^q}$$

donc $\phi_{h_n} = \phi_{f_1}$ d'où $\|h_n\|_p = \|f_1\|_p$.
On en déduit que φ s'étend en une isométrie linéaire de ℓ_q dans L_p, ce qui assure le résultat. $\square$

1.7 Ultrapuissances et applications

Introduits en 1972 par Dacunha-Castelle et Krivine, les ultraproduits sont aujourd'hui un outil indispensable dans la théorie des espaces de Banach. Nous ne donnerons ici que les définitions et propriétés dont nous aurons besoin. On pourra consulter [11] pour plus d'exhaustivité.

On rappelle que la distance de Banach-Mazur entre deux espaces vectoriels normés de même dimension finie E et F est définie par :

$$d(E,F) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|; T : E \to F \text{ isomorphisme linéaire}\}.$$

Commençons par introduire un peu de vocabulaire.

Définition 13. • *Soit E, F des espaces de Banach. On dit que F est finiment représentable dans E si : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout sous-espace F_1 de F de dimension finie, il existe un sous-espace E_1 de E vérifiant $d(E_1, F_1) < 1 + \varepsilon$.*
• *On dit qu'un espace de Banach X est super-réflexif si tout espace de Banach finiment représentable dans X est réflexif.*

Définition 14. *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble infini.*
• *Un filtre sur $\mathcal{I}$ est un ensemble $\mathscr{F}$ de parties de $\mathcal{I}$ tel que :*
(a) $\varnothing \notin \mathscr{F}$, $\mathcal{I} \in \mathscr{F}$;
(b) $\forall A \in \mathscr{F}, \forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{I}), A \subset B \implies B \in \mathscr{F}$;
(c) $\forall A, B \in \mathscr{F}, A \cap B \in \mathscr{F}$.
• *Soit $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ des filtres sur $\mathcal{I}$. On dit que le filtre $\mathscr{F}_1$ est plus fin que le filtre $\mathscr{F}_2$ si $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$.*
• *On appelle ultrafiltre un filtre maximal pour la relation d'inclusion.*
• *Étant donnés un espace topologique X et un filtre $\mathscr{F}$ sur $\mathcal{I}$, on dit qu'une fonction $f : \mathcal{I} \to X$ converge vers $\xi \in X$ via $\mathscr{F}$, et on écrit $\lim\limits_{\mathscr{F}} f(x) = \xi$, si, pour tout ouvert U de X contenant ξ, on a $f^{-1}(U) \in \mathscr{F}$.*

L'existence d'ultrafiltres est assurée par le lemme de Zorn et le résultat suivant :

Proposition 18. *Soit $\mathcal{I}$ un ensemble infini. L'ensemble des filtres sur $\mathcal{I}$, muni de la relation $\subset$, est inductif.*
Par conséquent, pour tout filtre $\mathscr{F}$, il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ plus fin que $\mathscr{F}$.

Remarque 10. *Dans un espace topologique séparé, tout point adhérent à un ultrafiltre est la limite de cet ultrafiltre.*

Donnons deux exemples de filtre sur $\mathbb{N}$.

Exemple. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir le filtre $\mathscr{F}_n = \{A \subset \mathbb{N}; n \in A\}$.*
Dans ce cas, pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique quelconque X, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in X \quad \lim_{\mathscr{F}_n} \xi_k = \xi \iff \xi_n = \xi.$$

(b) *Considérons le filtre $\mathscr{F}_\infty = \{A \subset \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, m \in A\}$. Alors, pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique quelconque X, on a :*

$$\forall \xi \in X \quad \lim_{\mathscr{F}_\infty} \xi_k = \xi \iff \lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi.$$

Définition 15. *Les filtres $\mathscr{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont en fait des ultrafiltres, appelés ultrafiltres principaux. Tout autre ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ doit contenir $\mathscr{F}_\infty$, ce sont les ultrafiltres non principaux.*

Définissons enfin les ultraproduits et ultrapuissances d'espaces de Banach.

Définition 16. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I.*
L'espace $\ell_\infty((E_i)_{i\in I}) = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i ; \sup_{i\in I} \|x_i\|_{E_i} < +\infty\right\}$, muni de :

$$\forall x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty((E_i)_{i\in I}), \|x\| = \sup_{i\in I} \|x_i\|_{E_i}$$

est un espace de Banach et son sous-espace $N = \left\{x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty((E_i)_{i\in I}); \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\right\}$ est fermé.
On définit l'ultraproduit des espaces $(E_i)_{i\in I}$ comme l'espace quotient $\ell_\infty((E_i)_{i\in I})/N$, muni de la norme quotient usuelle. On note $(E_i)_{\mathcal{U}}$ cet ultraproduit.
Les éléments de $(E_i)_{\mathcal{U}}$ sont notés $(x_i)_{\mathcal{U}}$, et $\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$.
Un ultraproduit dans lequel tous les espaces E_i sont égaux à un espace E est appelé une ultrapuissance de E, et noté $E_{\mathcal{U}}$.

Les principaux résultats liés à cette notion dont nous aurons besoin sont les suivants :

Proposition 19. *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$.*
(i) $E_{\mathcal{U}}$ est finiment représentable dans E.
(ii) Notons $i_E : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E_{\mathcal{U}} \\ x & \mapsto & (x)_{\mathcal{U}} \end{array}\right.$ l'injection naturelle et introduisons l'opérateur linéaire continu
$Q_E : \left\{\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{U}} & \to & E^{**} \\ (x_n)_{\mathcal{U}} & \mapsto & \omega^* - \lim_{\mathcal{U}} x_n \end{array}\right.$.
On a $Q_E \circ i_E = \Pi_E$.
En particulier, si E est complémenté dans E^{**}, alors E est 1-complémenté dans $E_{\mathcal{U}}$.
(iii) Un espace de Banach F est finiment représentable dans E si et seulement si il existe un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tel que F soit isométrique à un sous-espace de $E_{\mathcal{U}}$.
(iv) Le plongement naturel

$$I : \left\{\begin{array}{ccc} (E^*)_{\mathcal{U}} & \to & (E_{\mathcal{U}})^* \\ (x_i^*)_{\mathcal{U}} & \mapsto & \left\{\begin{array}{ccc} E_{\mathcal{U}} & \to & \mathbb{R} \\ (x_i)_{\mathcal{U}} & \mapsto & \lim_{\mathcal{U}} \langle x_i^*, x_i\rangle \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est une isométrie. Cette application est surjective si et seulement si E est super-réflexif.

Corollaire 4. *(i) Un espace de Banach X est super-réflexif si et seulement si tout ultrapuissance $X_{\mathcal{U}}$ de X est réflexif;*
(ii) Tout espace de Banach X réflexif est 1-complémenté dans $X_{\mathcal{U}}$.

Théorème 5. *Soit X, Y deux espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$.*
(i) Si $X \underset{N}{\sim} Y$, alors $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} Y_{\mathcal{U}}$;
(ii) Si $X \underset{CL}{\hookrightarrow} Y$, alors $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\hookrightarrow} Y_{\mathcal{U}}$;
(iii) Si les dimensions de X et Y sont infinies et que $X \underset{CL}{\hookrightarrow} Y$, alors $X \underset{L}{\hookrightarrow} Y_{\mathcal{U}}$.

Théorème 6. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré.*
Il existe un espace mesuré (Ω', Σ', μ') *tel que* $(L_p(\mu))_{\mathcal{U}} \equiv L_p(\mu')$.

Pour finir, les ultrapuissances permettent de montrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 7 (Ribe, 1978)**.** *Soit* X, Y *deux espaces de Banach vérifiant* $X \underset{CL}{\hookrightarrow} Y$.
Alors X *est finiment représentable dans* Y.

Remarque 11. *Cela signifie que les propriétés locales sont préservées par plongement grossièrement Lipschitzien.*

Théorème 8 (Heinrich-Mankiewicz, 1982)**.** *Soit* X, Y *deux espaces de Banach,* $Y_0 \subset Y$ *un sous-espace séparable complémenté de* Y.
Supposons que X *a la propriété de Radon-Nikodým (notée* (RNP)*), que* Y *est complémenté dans* Y^{**} *et que* $X \underset{L}{\sim} Y$.
Alors Y_0 *est isomorphe à un sous-espace complémenté de* X.

2 Principe des milieux approchés, graphes de Kalton et Randrianarivony, applications

2.1 Principe des milieux approchés

Introduisons dans cette sous-partie la notion de milieux approchés et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $1 \leq p_1 < p_2 \cdots < p_n < r < \infty$, $\ell_r \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$.
Commençons par définir les milieux approchés dans un espace de Banach. Cette notion et l'idée de comparer la "taille" des milieux approchés sont dus à Enflo, dans une preuve non publiée du fait que ℓ_1 et L_1 ne sont pas uniformément homéomorphes.

Définition 17. *Soit (X,d) un espace métrique, $(x,y) \in X^2$, $\delta > 0$.*
L'ensemble des milieux approchés de x et y à δ près est :

$$\mathrm{Mid}(x,y,\delta) = \left\{ z \in X ; \max\{d(x,z), d(y,z)\} \leq (1+\delta)\frac{d(x,y)}{2} \right\}.$$

Le résultat général concernant les milieux approchés est le suivant :

Proposition 20. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, (M,d) un espace métrique, $f : X \to M$ une application grossièrement Lipschitzienne vérifiant $\mathrm{Lip}_\infty(f) > 0$.*
Pour tous $t, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe $(x,y) \in X^2$ vérifiant :

$$\|x-y\| > t \text{ et } f(\mathrm{Mid}(x,y,\delta)) \subset \mathrm{Mid}(f(x), f(y), (1+\varepsilon)\delta).$$

Démonstration. Soit $t, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\delta \in]0,1[$.
Il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $(1+\varepsilon')^2(1+\delta) \leq 1 + (1+\varepsilon)\delta$.
Comme f est grossièrement Lipschitzienne, $\mathrm{Lip}_\infty(f) < +\infty$ donc il existe $s > t$ tel que $\mathrm{Lip}_s(f) \leq (1+\varepsilon')\,\mathrm{Lip}_\infty(f)$. De plus, par hypothèse, $\mathrm{Lip}_\infty(f) > 0$ donc :

$$\frac{1}{1+\varepsilon'}\,\mathrm{Lip}_\infty(f) < \mathrm{Lip}_\infty(f) \leq \mathrm{Lip}_{\frac{2s}{1-\delta}}(f).$$

On en déduit qu'il existe $(x,y) \in X^2$ tel que $\|x-y\| \geq \dfrac{2s}{1-\delta}$ et :

$$d(f(x), f(y)) \geq \frac{1}{1+\varepsilon'}\,\mathrm{Lip}_\infty(f)\|x-y\| \geq \frac{1}{(1+\varepsilon')^2}\,\mathrm{Lip}_s(f)\|x-y\|.$$

Comme $\frac{2s}{1-\delta} > t$, il suffit de montrer que $f(\mathrm{Mid}(x,y,\delta)) \subset \mathrm{Mid}(f(x), f(y), (1+\varepsilon)\delta)$.
Soit $u \in \mathrm{Mid}(x,y,\delta)$. On a :

$$s \leq \frac{1-\delta}{2}\|x-y\| = \|x-y\| - \frac{1+\delta}{2}\|x-y\| \leq \|x-y\| - \|x-u\| \leq \|y-u\|$$

donc :

$$\begin{aligned}
d(f(y), f(u)) &\leq \mathrm{Lip}_s(f)\|y-u\| \leq \mathrm{Lip}_s(f)\frac{1+\delta}{2}\|x-y\| \\
&\leq (1+\varepsilon')^2\frac{1+\delta}{2}d(f(x), f(y)) \\
&\leq \frac{1+(1+\varepsilon)\delta}{2}d(f(x), f(y)).
\end{aligned}$$

De même, $d(f(x), f(u)) \leq \dfrac{1+(1+\varepsilon)\delta}{2} d(f(x), f(y))$, d'où $f(u) \in \mathrm{Mid}(f(x), f(y), (1+\varepsilon)\delta)$, ce qui assure le résultat. $\square$

Dans la suite, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 4. *Soit $p \in [1, +\infty[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de Banach.*
Soit $x, y \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$, $\delta \in]0,1[$, $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$.
Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que le sous-espace vectoriel fermé $E = \left\{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} ; \forall j \in [|1, N|], \omega_j = 0\right\}$ vérifie :

$$u + \delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_E \subset \mathrm{Mid}(x, y, \delta).$$

Démonstration. • Cas $p = 1$:
Si $p = 1$, le résultat est clair puisque $\|x - u\| = \|y - u\| = \|v\|$.
• Cas $p > 1$:
Il existe $\nu > 0$ tel que $1 + (\delta^{1/p} + \nu)^p \leq (1+\delta)^p$ et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} \|v_i\|_{X_i}^p \geq (1 - \nu^p)\|v\|^p, \;\; i.e \;\; \sum_{i=N+1}^{\infty} \|v_i\|_{X_i}^p \leq \nu^p \|v\|^p.$$

Posons $E = [X_j]_{j>N} := \left\{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} ; \forall j \in [|1, N|], \omega_j = 0\right\}$.
Montrons que $u + \delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_E \subset \mathrm{Mid}(x, y, \delta)$.
Soit $z \in \delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_E$. On a :

$$\begin{aligned}
\|x - (u+z)\|^p = \|v - z\|^p &= \sum_{i=1}^{N} \|v_i\|_{X_i}^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} \|v_i - z_i\|_{X_i}^p \\
&\overset{\mathrm{IT}}{\leq} \|v\|^p + \left[\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \|v_i\|_{X_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \|z_i\|_{X_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\
&\leq \|v\|^p + (\nu\|v\| + \|z\|)^p \leq (1 + (\nu + \delta^{1/p})^p)\|v\|^p \\
&\leq (1+\delta)^p \|v\|^p
\end{aligned}$$

donc $\|x - (u+z)\| \leq (1+\delta)\|v\| = (1+\delta)\dfrac{\|x-y\|}{2}$.
De même, $\|y - (u+z)\| \leq \dfrac{1+\delta}{2}\|x - y\|$. On a donc bien :

$$u + \delta^{\frac{1}{p}} \|v\| B_E \subset \mathrm{Mid}(x, y, \delta).$$

$\square$

Lemme 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < \infty$, $X = (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}$, $(x, y) \in X^2$, $\delta \in]0,1[$, $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$.*
Il existe un compact $K \subset X$ tel que $\mathrm{Mid}(x, y, \delta) \subset K + 2\delta^{1/p_n}\|v\| B_X$.

Démonstration. Pour tout $z \in X$, on note $z = ((z^k))_{k=1}^n$ avec, pour tout $k \in [|1,n|]$, $z^k = (z_j^k)_{j\in\mathbb{N}^*} \in \ell_{p_k}$. Notons également $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de c_{00}.
Il existe $\nu > 0$ tel que $(1+\delta)^{p_n} - (1-\nu^{p_n}) \leq 2^{p_n}\delta$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\|v\|^{p_n} - \sum_{j=1}^{N} |v_j^n|^{p_n} \leq \nu^{p_n}\|v\|^{p_n}.$$

Posons $F_N = \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_N\}$ et, pour tout $k \in [|1,n|]$, $E_N^{p_k} = \overline{\mathrm{Vect}}^{p_k}\{e_i, i > N\}$. On note que $K := u + (1+\delta)\|v\|B_{F_N\oplus\cdots\oplus F_N}$ est compact. Montrons que :

$$\mathrm{Mid}(x,y,\delta) \subset K + 2\delta^{1/p_n}\|v\|B_X.$$

Soit $t \in \mathrm{Mid}(x,y,\delta)$. On pose $z = t - u$. On peut écrire $z = z' + z''$ avec $z' \in F_N \oplus \cdots \oplus F_N$ et $z'' \in E_N^{p_1} \oplus \cdots \oplus E_N^{p_n}$.
• Montrons que $u + z' \in K$. On a :

$$\|v - z\| = \|v - u + t\| = \|x - t\| \leq (1+\delta)\frac{\|x-y\|}{2} = (1+\delta)\|v\|$$

et :

$$\|v + z\| = \|v - u + t\| = \|y - t\| \leq (1+\delta)\|v\|$$

donc $\|z'\| \leq \|z\| = \frac{1}{2}\|z - v - (v - z)\| \leq (1+\delta)\|v\|$, d'où $u + z' \in K$.
• Montrons désormais que $\|z''\| \leq 2\delta^{1/p_n}\|v\|$.
Pour tout $k \in [|1,n|]$, la fonction $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto s^{p_k}$ est convexe donc, pour tout $k \in [|1,n-1|]$, on a :

$$\|(z'')^k\|_{p_k}^{p_k} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \left|\frac{v_i^k + z_i^k}{2} + \frac{z_i^k - v_i^k}{2}\right|^{p_k} \leq \frac{1}{2}(\|v^k + z^k\|_{p_k}^{p_k} + \|v^k - z^k\|_{p_k}^{p_k})$$

et :

$$\begin{aligned}\|(z'')^n\|_{p_n}^{p_n} + (1-\nu^{p_n})\|v\|^{p_n} &\leq \sum_{j=1}^{N}|v_j^n|^{p_n} + \sum_{j=N+1}^{\infty}|z_j^n|^{p_n} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\max(|v_j^n|^{p_n}, |z_j^n|^{p_n}) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|v^n + z^n\|_{p_n}^{p_n} + \|v^n - z^n\|_{p_n}^{p_n})\end{aligned}$$

d'où, toujours par convexité :

$$\begin{aligned}\|z''\|^{p_n} &= \sum_{k=1}^{n-1}\|(z'')^k\|_{p_k}^{p_n} + \|(z'')^n\|_{p_n}^{p_n} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\|v^k + z^k\|_{p_k}^{p_k} + \|v^k - z^k\|_{p_k}^{p_k}}{2}\right)^{\frac{p_n}{p_k}} - (1-\nu^{p_n})\|v\|^{p_n} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\|v^k + z^k\|_{p_k}^{p_n} + \|v^k - z^k\|_{p_k}^{p_n}) - (1-\nu^{p_n})\|v\|^{p_n} \\ &= \frac{1}{2}(\|v + z\|^{p_n} + \|v - z\|^{p_n}) - (1-\nu^{p_n})\|v\|^{p_n} \\ &\leq (1+\delta)^{p_n}\|v\|^{p_n} - (1-\nu^{p_n})\|v\|^{p_n} \\ &\leq 2^{p_n}\delta\|v\|^{p_n}\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

Ces deux lemmes et la proposition 20 permettent de montrer le résultat ci-dessous.

Proposition 21. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < q < +\infty$, $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de Banach non réduits à $\{0\}$, $Z = (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}$ $f : \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q} \to Z$ une application grossièrement Lipschitzienne.*

Pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_q}$, $\tau > t$, $N \in \mathbb{N}^*$, $K \subset Z$ un compact tels que :

$$f(x + \tau B_{E_N}) \subset K + \varepsilon\tau B_Z$$

où $E_N = \left\{ (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q} ; \forall j \in [|1, N|], \omega_j = 0 \right\}$.

Démonstration. Soit $t > 0$, $\varepsilon > 0$. On distingue deux cas.

• Cas $\mathrm{Lip}_\infty(f) = 0$:

Il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tous $x, y \in \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q}$, on ait :

$$\|x - y\| \geq \delta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|.$$

Posons alors $N = 1$, $x \in \delta S_{X_1}$ quelconque, $\tau = 2t > t$, $K = \{f(x)\} \subset Z$ compact.

Pour tout $z \in B_{E_N}$, $\|x - \tau z\| \geq \|x_1 - \tau z_1\|_{X_1} = \|x_1\|_{X_1} = \delta$ donc :

$$\|f(x + \tau z) - f(x)\| \leq \varepsilon\|\tau z\| \leq \varepsilon\tau$$

d'où $f(x + \tau B_{E_N}) \subset K + \varepsilon\tau B_Z$.

• Cas $\mathrm{Lip}_\infty(f) > 0$:

Il existe $\delta > 0$ tel que $\delta^{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q}} \leq \dfrac{\varepsilon}{4\,\mathrm{Lip}_\infty(f)2^{1/p_n}}$ et $s > \dfrac{2t}{\delta^{1/q}}$ tel que $\mathrm{Lip}_s(f) \leq 2\,\mathrm{Lip}_\infty(f)$.

D'après la proposition 20, il existe $x, y \in \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q}$ tels que :

$$\|x - y\| \geq s \text{ et } f(\mathrm{Mid}(x, y, \delta)) \subset \mathrm{Mid}(f(x), f(y), 2\delta).$$

Posons $u = \dfrac{x+y}{2}$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$, $\tau = \delta^{1/q}\|v\| \geq \delta^{1/q}\dfrac{s}{2} > t$.

D'après les lemmes 4 et 5, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $K \subset Z$ compact tels que :

$$u + \tau B_{E_N} = u + \delta^{1/q}\|v\|B_{E_N} \subset \mathrm{Mid}(x, y, \delta)$$

où $E_N = \left\{ (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q} ; \omega_1 = \cdots = \omega_N = 0 \right\}$, et :

$$\mathrm{Mid}(f(x), f(y), 2\delta) \subset K + (2\delta)^{1/p_n}\|f(x) - f(y)\|B_Z.$$

Or :

$$\begin{aligned}
(2\delta)^{1/p_n}\|f(x) - f(y)\| &\leq (2\delta)^{1/p_n}\,\mathrm{Lip}_s(f)\|x - y\| \leq 2\,\mathrm{Lip}_\infty(f)(2\delta)^{1/p_n}\|x - y\| \\
&= 4\,\mathrm{Lip}_\infty(f)2^{1/p_n}\delta^{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q}}\|v\|\delta^{1/q} = 4\,\mathrm{Lip}_\infty(f)2^{1/p_n}\delta^{\frac{1}{p_n}-\frac{1}{q}}\tau \\
&\leq \varepsilon\tau
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Mid}(f(x), f(y), 2\delta) \subset K + \varepsilon\tau B_Z$, ce qui conclut car $f(u + \tau B_{E_N}) \subset f(\mathrm{Mid}(x, y, \delta))$. $\square$

Remarque 12. *Notons que la conclusion de la proposition 21 reste valable pour toute norme équivalente sur* $\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_q}$.

On peut alors prouver le résultat souhaité.

Corollaire 5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < q < +\infty$.
On a :

$$\ell_q \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe un plongement grossièrement Lipschitzien de ℓ_q dans $(\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}$. Notons $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la base canonique de c_{00}.
Il existe alors $f : \ell_q \to (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}$, $\theta > 0$ tels que, pour tous $x, y \in \ell_q$, on ait :

$$\|x - y\| \geq \theta \implies \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

D'après la proposition 21, il existe $u \in \ell_q$, $\tau > \theta$, $N \in \mathbb{N}^*$, $K \subset (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}$ compact tels que :

$$f(u + \tau B_{E_N}) \subset K + \frac{\tau}{6} B_{(\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}} \quad (*)$$

avec $E_N = \overline{\mathrm{Vect}}^{\|.\|_q}\{e_i, i > N\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = u + \tau e_{N+n} \in u + \tau B_{E_N}$.
Notons que, pour tous $n \neq m \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n - u_m\| = \tau 2^{1/q} \geq \tau$.
D'après $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \in K$, $v_n \in B_{(\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_{p_n}}}$ tels que $f(u_n) = k_n + \frac{\tau}{6} v_n$.
Or K est compact donc il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $k \in K$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} k_{\varphi(n)} = k$. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tous $m, n \geq n_0$, on ait $\|k_{\varphi(n)} - k_{\varphi(m)}\| \leq \frac{\tau}{6}$.
D'où, pour tous $m > n \geq n_0$, comme $\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}\| \geq \theta$, on a :

$$\begin{aligned} \|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}\| \leq \|f(u_{\varphi(n)}) - f(u_{\varphi(m)})\| &= \left\| k_{\varphi(n)} - k_{\varphi(m)} + \frac{\tau}{6}(v_{\varphi(n)} - v_{\varphi(m)}) \right\| \\ &\leq 3\frac{\tau}{6} \leq \frac{1}{2}\|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}\| \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $\ell_q \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$. □

Remarque 13. *En particulier, pour tous* $1 \leq p < q < \infty$, $\ell_q \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p$.

2.2 Graphes de Kalton et Randrianarivony

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que ℓ_p, $1 < p < +\infty$ a une unique structure de réseau et d'en déduire, grâce aux graphes introduits par Kalton et Randrianarivony, que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_1 < \cdots < p_n < +\infty$ vérifiant $2 \notin \{p_1, \cdots, p_n\}$, l'espace $\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$ a une unique structure de réseau.
Le théorème clé pour ce faire est le résultat ci-dessous.

Pour tout $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on munit $[\mathbb{M}]^k$ de la distance suivante :

$$\forall \overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{M}]^k, d(\overline{n}, \overline{m}) = \mathrm{Card}\{j \in [|1, k|]; n_i \neq m_j\}.$$

Théorème 9. *Soit Y un espace de Banach réflexif tel qu'il existe $p \in]1, +\infty[$ avec la propriété suivante : tout $y \in Y$ et toute suite faiblement nulle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$ vérifient*

$$\limsup_{n\to\infty} \|y + y_n\|^p \leq \|y\|^p + \limsup_{n\to\infty} \|y_n\|^p \quad (*).$$

Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi : [\mathbb{M}]^k \to Y$ une application Lipschitzienne.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ vérifiant :

$$\operatorname{diam}(\varphi([\mathbb{M}']^k)) \leq 2 \operatorname{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

Démonstration. Prouvons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose H_k : pour tout $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, pour toute fonction $\varphi : [\mathbb{M}]^k \to Y$ Lipschitzienne, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $u \in Y$ vérifiant :

$$\forall \overline{n} \in [\mathbb{M}']^k, \|\varphi(\overline{n}) - u\| \leq \operatorname{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.$$

$*$ Montrons que H_1 est vraie.
Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\varphi : \mathbb{M} \to Y$ une fonction Lipschitzienne, $\varepsilon > 0$.
La suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{M}} \subset Y$ est bornée et Y est réflexif donc il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $u \in Y$ tels que $\lim\limits_{n\in\mathbb{M}'\to\infty} \varphi(n) = u$ faiblement.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{M}'$, on a :

$$\|u - \varphi(n)\| \leq \limsup_{m\in\mathbb{M}'\to\infty} \|\varphi(m) - \varphi(n)\| \leq \operatorname{Lip}(\varphi) \times 1 \leq \operatorname{Lip}(\varphi) + \varepsilon$$

d'où la véracité de H_1.
$*$ Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que H_{k-1} soit vraie.
Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\varphi : [\mathbb{M}]^k \to Y$ une fonction Lipschitzienne, $\varepsilon > 0$.
Comme Y est réflexif, une extraction diagonale assure l'existence de $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $\psi : [\mathbb{M}_0]^{k-1} \to Y$ tels que :

$$\forall \overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}_0]^{k-1}, \omega - \lim_{n_k\in\mathbb{M}_0\to\infty} \varphi(n_1, \cdots, n_{k_1}, n_k) = \psi(\overline{n}) \in Y.$$

On note que ψ est Lipschitzienne avec $\operatorname{Lip}(\psi) \leq \operatorname{Lip}(\varphi)$.
Il existe $\eta > 0$ tel que $\left(\left(\operatorname{Lip}(\varphi)(k-1)^{\frac{1}{p}} + \eta\right)^p + \operatorname{Lip}(\varphi)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \operatorname{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2}$.
D'après H_{k-1}, il existe $\mathbb{M}_1 \in [\mathbb{M}_0]^\omega$ et $u \in Y$ tels que :

$$\forall \overline{n} \in [\mathbb{M}_1]^{k-1}, \|\psi(\overline{n}) - u\| \leq \operatorname{Lip}(\psi)(k-1)^{\frac{1}{p}} + \eta \leq \operatorname{Lip}(\varphi)(k-1)^{\frac{1}{p}} + \eta.$$

Fixons désormais $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}_1]^{k-1}$. On a : $\omega - \lim\limits_{n_k\in\mathbb{M}_1\to\infty} \varphi(n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k) = \psi(\overline{n})$ donc, par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n_k\in\mathbb{M}_1\to\infty} \|u - \varphi(n_1, \cdots, n_k)\|^p &= \limsup_{n_k\in\mathbb{M}_1\to\infty} \|u - \psi(\overline{n}) + \psi(\overline{n}) - \varphi(n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k)\|^p \\
&\leq \|u - \psi(\overline{n})\| + \limsup_{n_k\in\mathbb{M}_1\to\infty} \|\psi(\overline{n}) - \varphi(n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k)\|^p \\
&\leq \left(\operatorname{Lip}(\varphi)(k-1)^{\frac{1}{p}} + \eta\right)^p + (\operatorname{Lip}(\varphi) \times 1)^p
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $(n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}_1]^{k-1}$, $\limsup\limits_{n_k \in \mathbb{M}_1 \to \infty} \|u - \varphi(n_1, \cdots, n_k)\|^p \leq \mathrm{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Appliquons désormais le corollaire 1 à la fonction définie par :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lll} [\mathbb{M}_1]^k & \to & \mathbb{R}^* \\ \overline{n} & \mapsto & \|u - \varphi(\overline{n})\| \end{array} \right. .$$

La fonction ϕ est bornée car, pour tout $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{M}_1]^k$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(\overline{n}) &\leq \limsup_{m_k \in \mathbb{M}_1 \to \infty} \|u - \varphi(\overline{n}) - u + \varphi(n_1, \cdots, n_{k-1}, m_k)\| + \limsup_{m_k \in \mathbb{M}_1 \to \infty} \|u - \varphi(n_1, \cdots, n_{k-1}, m_k)\| \\ &\leq \mathrm{Lip}(\varphi) \times 1 + \mathrm{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

donc, d'après le corollaire 1, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}_1]^\omega \subset [\mathbb{M}]^\omega$ tel que :

$$\forall \overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{M}']^k, |\|u - \varphi(\overline{n})\| - \|u - \varphi(\overline{m})\|| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que, pour tout $\overline{n} \in [\mathbb{M}']^k$, $\|\varphi(\overline{n}) - u\| \leq \mathrm{Lip}(\varphi) k^{\frac{1}{p}} + \varepsilon$.
Donc H_k est vraie.
Le principe de récurrence assure alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, H_k est vraie. Le résultat recherché s'ensuit immédiatement. □

Remarque 14. • *On ne peut se passer de l'hypothèse de réflexivité. En effet, c_0 vérifie l'hypothèse $(*)$ pour n'importe quel $p \in]1, +\infty[$ mais ne peut vérifier la conclusion du théorème pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ d'après le théorème d'Aharoni.*
• *D'après les propositions 16 et 15, pour tout $p \in]1, +\infty[$, ℓ_p vérifie les hypothèses du théorème.*
• *Soit $n \geq 2$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < \infty$. L'espace $(\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_\infty}$ vérifie également les hypothèses du théorème avec $p = p_1$.*

Démonstration. En effet, montrons le, pour simplifier, pour $Y = (\ell_p \oplus \ell_q)_{\ell_\infty}$, $p < q$.
Soit $(y^1, y^2) \in Y$, $((y_n^1, y_n^2))_{n \in \mathbb{N}^*} \subset Y$ faiblement nulle.
On a déjà :

$$\limsup \|y^1 + y_n^1\|_p^p \leq \|y^1\|_p^p + \limsup \|y_n^1\|_p^p.$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\limsup \|y^2 + y_n^2\|_p^p = (\limsup \|y^2 + y_n^2\|_q^q)^{p/q} \leq (\|y^2\|_q^q + \limsup \|y_n^2\|_q^q)^{p/q} \leq \|y^2\|_p^p + \limsup \|y_n^2\|_p^p$$

pour conclure. □

On déduit de ce théorème les deux corollaires suivants.

Corollaire 6. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < \infty$, $r \in [1, +\infty[\setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$.*
On a : $\ell_r \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$.

Démonstration. • Le cas $1 \leq p_1 < \cdots < p_n < r$ à déjà été vu dans la partie précédente.
• Si $1 \leq r < p_1 < \cdots < p_n < \infty$:
On pose $Z = (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_\infty}$.
Supposons que $\ell_r \underset{CL}{\hookrightarrow} Z$.

Il existe alors une application $f : \ell_r \to Z$ et une constante $C \geq 1$ telles que, pour tous $x, y \in \ell_r$, on ait :

$$\|x-y\| \geq 1 \implies \|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq C\|x-y\|.$$

On peut écrire $f = (f_1, \cdots, f_n)$ avec, pour tout $i \in [|1,n|]$, $f_i : \ell_r \to \ell_{p_i}$.
Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la base canonique de c_{00}. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p_1}} > \dfrac{6C}{2^{1/r}}$.
L'application définie par :

$$\varphi : \begin{cases} [\mathbb{N}^*]^k & \to \ell_r \\ (n_1, \cdots, n_k) & \mapsto \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \end{cases}$$

est 2-Lipschitzienne.
En particulier, pour tout $i \in [|1,n|]$, $f_i \circ \varphi : [\mathbb{N}^*]^k \to \ell_{p_i}$ est $2C$-Lipschitzienne. On peut alors, d'après le théorème 9, construire $\mathbb{M}_n \subset \cdots \subset \mathbb{M}_1$, éléments de $[\mathbb{N}^*]^\omega$, tels que :

$$\forall i \in [|1,n|], \mathrm{diam}((f_i \circ \varphi)([\mathbb{M}_i]^k)) \leq 6Ck^{1/p_i}.$$

Or $\mathrm{diam}(\varphi([\mathbb{M}_n]^k)) = (2k)^{1/r}$ donc :

$$(2k)^{1/r} \leq \max_{1\leq i\leq n} 6Ck^{1/p_i} = 6Ck^{1/p_1}$$

ce qui est absurde par choix de k. D'où $\ell_r \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$.
• S'il existe $m \in [|1, n-1|]$ tel que $p_m < r < p_{m+1}$:
Supposons que $\ell_r \underset{CL}{\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$.
Il existe alors une application $f : \ell_r \to (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_\infty}$ et une constante $B \geq 1$ telles que, pour tous $x, y \in \ell_r$, on ait :

$$\|x-y\| \geq 1 \implies \|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|_\infty \leq B\|x-y\|.$$

Posons $X = (\ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_m})_{\ell_{p_m}}$ et $Y = (\ell_{p_{m+1}} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n})_{\ell_\infty}$. On a :

$$\forall x, y \in \ell_r, \|f(x)-f(y)\|_\infty \leq \|f(x)-f(y)\|_{(X\oplus Y)_{\ell_\infty}} \leq m^{1/p_m}\|f(x)-f(y)\|_\infty.$$

Voyons désormais f comme une application de ℓ_r dans $(X \oplus Y)_{\ell_\infty}$.
Si on pose $C = m^{1/p_m}B$, on a :

$$\forall x, y \in \ell_r, \|x-y\| \geq 1 \implies \|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\|_\infty \leq C\|x-y\|.$$

Écrivons $f = (g, h)$ avec $g : \ell_r \to X$, $h : \ell_r \to Y$.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in]0,1[$ tels que $3 \cdot 2^{\frac{1}{r}} \left(Ck^{\frac{1}{p_{m+1}}-\frac{1}{r}} + \delta\right) \leq 1$.
D'après la proposition 21, il existe $\tau > k$, $x \in \ell_r$, $N \in \mathbb{N}^*$, $K \subset X$ compact tels que :

$$g(x + \tau B_{E_N}) \subset K + \delta\tau B_X$$

où $E_N = \overline{\mathrm{Vect}}^{\|\cdot\|_r}\{e_i, i > N\}$.
Posons $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N}^*; m > N\} \in [\mathbb{N}]^\omega$, et

$$\varphi : \begin{cases} [\mathbb{M}]^k & \to \left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right)_{\ell_r} \\ (n_1, \cdots, n_k) & \mapsto x + \tau k^{-1/r} \sum_{i=1}^{k} e_{n_i} \end{cases}.$$

On a $g \circ \varphi([\mathbb{M}]^k) \subset K + \delta\tau B_X$ donc, d'après le corollaire 2, il existe $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{M}]^\omega$ tel que $\operatorname{diam}(g \circ \varphi([\mathbb{M}_0]^k)) \leq 3\delta\tau$.
De plus, $\operatorname{Lip}(h \circ \varphi) \leq 2^{1/r} C\tau k^{-1/r}$ donc, d'après le théorème 9, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}_0]^\omega$ tel que $\operatorname{diam}(h \circ \varphi([\mathbb{M}']^k)) \leq 3 \cdot 2^{\frac{1}{r}} C\tau k^{\frac{1}{p_{m+1}} - \frac{1}{r}}$.
On a donc :

$$\operatorname{diam}(f \circ \varphi([\mathbb{M}']^k)) \leq 3 \cdot 2^{\frac{1}{r}} \tau \left(C k^{\frac{1}{p_{m+1}} - \frac{1}{r}} + \delta \right).$$

Or $\operatorname{diam}(\varphi([\mathbb{M}']^k)) > \tau$ donc $\operatorname{diam}(f \circ \varphi([\mathbb{M}']^k)) > \tau$ d'où :

$$\tau < 3 \cdot 2^{\frac{1}{r}} \tau \left(C k^{\frac{1}{p_{m+1}} - \frac{1}{r}} + \delta \right)$$

ce qui est absurde par choix de δ et de k. D'où $\ell_r \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}$. □

Remarque 15. *En particulier, pour tous $1 \leq q < p < +\infty$, $\ell_q \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p$ et, pour tous $1 \leq p < q < \infty$, pour tout $r \in [1, +\infty[\setminus \{p, q\}$, $\ell_r \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_q$.*

Corollaire 7. *Soit $1 \leq p < 2$.*
Il n'existe pas de plongement grossièrement Lipschitzien de L_p dans $\ell_p \oplus \ell_2$.
En particulier, L_p n'est pas grossièrement Lipschitz-équivalent (ou uniformément homéomorphe) à $\ell_p \oplus \ell_2$.

Démonstration. S'il existe un plongement grossièrement Lipschitzien de L_p dans $\ell_p \oplus \ell_2$, alors d'après le théorème 4, $\ell_r \underset{CL}{\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$ avec $r = \frac{p+2}{2} \in]p, 2[$, ce qui est absurde. D'où le résultat. □

Pour prouver l'unicité de la structure de réseau de ℓ_p, $1 < p < +\infty$, on pourrait utiliser le principe de Gorelik (cf [10]). On préfère ici appliquer le corollaire 6. Pour cela, nous admettrons les deux théorèmes ci-dessous.

Théorème 10 (Kwapien)**.** *Soit X un espace de Banach.*
L'espace X est isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si X est de type 2 et de cotype 2.

Théorème 11 (Johnson-Odell)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[\setminus \{2\}$.*
Tout sous-espace de dimension infinie complémenté dans L_p qui ne contient aucune copie isomorphe de ℓ_2 est isomorphe à ℓ_p.

Théorème 12. *Soit $1 < p < +\infty$, X un espace de Banach. On a :*

$$X \underset{N}{\sim} \ell_p \implies X \simeq \ell_p.$$

Démonstration. Supposons $X \underset{N}{\sim} \ell_p$. Alors X est séparable et, d'après le théorème de Riesz, X est de dimension infinie.
• Cas $p = 2$:
Commençons par rappeler que le type (de Rademacher) et le cotype d'un espace de Banach, définis au début de l'annexe, sont invariants par isomorphismes et hérités par les sous-espaces. Comme $X \underset{N}{\sim} \ell_2$, on a, d'après la proposition 4, $X \underset{CL}{\sim} \ell_2$ donc, d'après le théorème 7, X est de type 2 et de cotype 2. Le théorème 10 assure alors que $X \simeq \ell_2$.
• Cas $p \neq 2$:

D'après le théorème 5, $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} (\ell_p)_{\mathcal{U}}$ et, d'après le théorème 6, il existe un espace mesuré (Ω, Σ, μ) tel que $(\ell_p)_{\mathcal{U}} \equiv L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
En particulier, comme X est séparable, que $L_p(\mu)$ a RNP et que $X \underset{L}{\hookrightarrow} L_p(\mu)$, on sait que X est isomorphe à un sous-espace de $L_p(\mu)$. En particulier, X est super-réflexif donc, d'après la proposition 19, X est complémenté dans $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} L_p(\mu)$.
Appliquons désormais le théorème 8. On a : X est un sous-espace séparable complémenté dans $X_{\mathcal{U}}$, $X_{\mathcal{U}}$ est réflexif donc complémenté dans $X_{\mathcal{U}}^{**}$, $L_p(\mu)$ a RNP et $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} L_p(\mu)$ donc, d'après le théorème 8, X est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L_p(\mu)$.
Comme X est séparable, on en déduit (cf [29], p.9) que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de L_p.
Or, d'après le corollaire 6, X ne contient aucune copie isomorphe de ℓ_2 donc, d'après le théorème 11, $X \simeq \ell_p$. □

On peut alors prouver le théorème suivant :

Théorème 13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_1 < \cdots < p_n < +\infty$ vérifiant $2 \notin \{p_1, \cdots, p_n\}$, X un espace de Banach. On a :*

$$X \underset{N}{\sim} \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n} \implies X \simeq \ell_{p_1} \oplus \cdots \oplus \ell_{p_n}.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ a été vu dans le théorème précédent. Pour simplifier les notations, on montre l'hérédité $n \to n+1$ avec $n = 2$.
Posons $Y = \ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$. Comme $X \underset{N}{\sim} Y$, on a :

$$X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} Y_{\mathcal{U}} \equiv L_{p_1}(\tilde{\mu}_1) \oplus L_{p_2}(\tilde{\mu}_2)$$

avec $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$ des mesures définies respectivement sur des espaces mesurés (Ω_1, Σ_1) et (Ω_2, Σ_2).
En particulier, X est super-réflexif et X est 1-complémenté dans $X_{\mathcal{U}}$. On en déduit alors, comme dans la preuve du théorème précédent, grâce au théorème 8, que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L_{p_1}(\tilde{\mu}_1) \oplus L_{p_2}(\tilde{\mu}_2)$. Comme X est séparable, on en déduit que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L_{p_1} \oplus L_{p_2}$. Notons J un tel isomorphisme.
• Cas $2 < p_1$:
Notons S_1 la projection naturelle de $L_{p_1}(\tilde{\mu}_1) \oplus L_{p_2}(\tilde{\mu}_2)$ sur L_{p_1} et S_2 la projection naturelle de $L_{p_1}(\tilde{\mu}_1) \oplus L_{p_2}(\tilde{\mu}_2)$ sur L_{p_2}. D'après le corollaire 6, $\ell_2 \underset{CL}{\not\hookrightarrow} Y$ donc X ne contient aucune copie isomorphe de ℓ_2. D'après un résultat de Johnson (cf [4], Théorème F.2), $S_1 J$ se factorise à travers ℓ_{p_1} et $S_2 J$ se factorise à travers ℓ_{p_2}, c'est-à-dire qu'il existe $R_1 : X \to \ell_{p_1}$, $R_2 : X \to \ell_{p_2}$, $S_1' : \ell_{p_1} \to L_{p_1}$ et $S_2' : \ell_{p_2} \to L_{p_2}$ vérifiant $S_1 J = S_1' R_1$ et $S_2 J = S_2' R_2$. Donc J se factorise à travers $\ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$. En effet, les applications

$$R : \left\{ \begin{array}{lcl} X & \to & \ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2} \\ x & \mapsto & (R_1 x, R_2 x) \end{array} \right. \quad \text{et } S : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2} & \to & L_{p_1} \oplus L_{p_2} \\ (x, y) & \mapsto & (S_1' x, S_2' y) \end{array} \right.$$

vérifient $J = SR$. En particulier, l'application R est injective donc $X \simeq R(X)$.
On en déduit que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de $\ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$: si on note $Q : L_{p_1} \oplus L_{p_2} \to J(X)$ une projection linéaire continue, alors $P = R \circ J^{-1} \circ Q \circ S$ est une projection linéaire continue de $\ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$ sur $R(X)$.
D'après le corollaire 3.7 de [7], on a $X \simeq \ell_{p_1}$ ou $X \simeq \ell_{p_2}$ ou $X \simeq \ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$.
Or, si $X \simeq \ell_{p_1}$, d'après le théorème 12, on a $\ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2} \simeq \ell_{p_1}$, ce qui est impossible.
En effet, si $\ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2} \simeq \ell_{p_1}$, alors ℓ_{p_2} est isomorphe à un sous-espace de ℓ_{p_1} donc, d'après le

théorème de Pelczynski, ℓ_{p_2} contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ_{p_1}. Toujours d'après le théorème de Pelczynski, comme tout sous-espace complémenté de ℓ_{p_2} de dimension infinie est isomorphe à ℓ_{p_2}, on a $\ell_{p_2} \simeq \ell_{p_1}$, ce qui est impossible d'après le théorème de Pitt (cf [1]).
Donc $X \not\simeq \ell_{p_1}$. De même, $X \not\simeq \ell_{p_2}$, d'où le résultat.
• Cas $p_2 < 2$:
Notons $q_1 > 2$ et $q_2 > 2$ les exposants conjugués de p_1 et p_2 respectivement.
On note alors (cf [1], Propriété A.5) que X^* est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L_{q_1} \oplus L_{q_2}$.
Montrons que X^* ne contient aucune copie isomorphe de ℓ_2. Supposons qu'il existe $Z \subset X$ vérifiant $Z \simeq \ell_2$. Comme X^* est de type 2 (car $L_{q_1} \oplus L_{q_2}$ est de type 2 d'après le théorème 6.2.14 de [1]), le théorème de Maurey (cf [1], Théorème 7.4.8) assure que Z est complémenté dans X^*. Or X est réflexif donc Z^* est complémenté dans X, d'où X contient une copie isomorphe de ℓ_2, ce qui est absurde.
Donc X^* ne contient aucune copie isomorphe de ℓ_2 et, comme dans le cas précédent, $X^* \simeq \ell_{q_1} \oplus \ell_{q_2}$, d'où le résultat.
• Cas $p_1 < 2 < p_2$:
Posons $S : L_{p_1} \oplus L_{p_2} \to L_{p_2}$ la projection naturelle. D'après le résultat de Johnson cité précédemment, $S \circ J : X \to L_{p_2}$ se factorise à travers ℓ_{p_2} puisque X ne contient pas de copie isomorphe de ℓ_2. On en déduit, comme dans la preuve du premier cas, que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de $L_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$. Or L_{p_1} et ℓ_{p_2} sont incomparables (s'il existe $E \subset L_{p_1}$ et $F \subset \ell_{p_2}$ sous-espaces de dimension infinie vérifiant $E \simeq F$, alors E est de cotype 2 et $\ell_{p_2} \subset F$, d'après le théorème de Bessaga-Pelcynski, donc F est de cotype plus grand ou égal à p_2, ce qui est absurde car $p_2 > 2$) donc, d'après le théorème d'Edelstein-Wojtaszcyk, $X \simeq F \oplus G$, avec F un sous-espace complémenté de L_{p_1} et G un sous-espace complémenté de ℓ_{p_2}.
D'après le théorème de Bessaga-Pelczynski, $G \simeq \ell_{p_2}$ ou $\dim(G) < \infty$; et, d'après le théorème 11, $F \simeq \ell_{p_1}$ ou $\dim(F) < +\infty$.
On a donc $X \simeq \ell_{p_1}$ ou $X \simeq \ell_{p_2}$ ou $X \simeq \ell_{p_1} \oplus \ell_{p_2}$. On en déduit le résultat comme dans les cas précédents. □

Remarque 16. *Si $2 \in \{p_1, \cdots, p_n\}$, on ne sait pas si le résultat reste vrai.*

Déduisons également de ce qui précède le corollaire ci-dessous :

Corollaire 8. *Pour tout $p \in [1, +\infty[\setminus\{2\}$, $\ell_p(\ell_2) \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $(e_{i,j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ la base canonique de la i-ième coordonnée de $\ell_p(\ell_2)$.
• Cas $2 < p < +\infty$:
Supposons que $\ell_p(\ell_2) \underset{CL}{\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$.
Il existe alors $f : \ell_p(\ell_2) \to \ell_p \underset{\infty}{\oplus} \ell_2$ et $C \geq 1$ tels que, pour tous $x, y \in \ell_p(\ell_2)$, on ait :

$$\|x - y\| \geq 1 \implies \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

On peut écrire $f = (g, h)$ avec $g : \ell_p(\ell_2) \to \ell_p$ et $h : \ell_p(\ell_2) \to \ell_2$.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in]0, 1[$ tels que $3\sqrt{2}(Ck^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta) \leq 1$.
Comme $p > 2$, d'après la proposition 21, il existe $\tau > k$, $x \in \ell_p(\ell_2)$, $N \in \mathbb{N}^*$, $K \subset \ell_2$ compact tels que $E = \overline{\mathrm{Vect}}\{e_{i,j} ; i > N, j \in \mathbb{N}^*\}$ vérifie :

$$g(x + \tau B_E) \subset K + \delta\tau B_{\ell_2}.$$

Posons $\varphi : \begin{cases} [\mathbb{N}^*]^k & \to \quad \ell_p(\ell_2) \\ (n_1, \cdots, n_k) & \mapsto \quad x + \tau k^{-\frac{1}{2}}(e_{N+1,n_1} + \cdots + e_{N+1,n_k}) \end{cases}$
$*$ Pour tout $(n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k$, $\|e_{N+1,n_1} + \cdots + e_{N+1,n_k}\| = \sqrt{k}$ donc $g \circ \varphi([\mathbb{N}^*]^k) \subset K + \delta\tau B_{\ell_2}$ d'où, d'après le corollaire 2, il existe $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{N}^*]^\omega$ tel que :

$$\mathrm{diam}(g \circ \varphi([\mathbb{M}_0]^k)) \leq 3\delta\tau \leq 3\sqrt{2}\delta\tau.$$

$*$ De plus, $\mathrm{Lip}(h \circ \varphi) \leq C\tau k^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ donc, d'après le théorème 9, il existe $\mathbb{M} \in [\mathbb{M}_0]^\omega$ tel que :

$$\mathrm{diam}(h \circ \varphi([\mathbb{M}]^k)) \leq 3\sqrt{2}C\tau k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

$*$ On en déduit que $\mathrm{diam}(f \circ \varphi([\mathbb{M}]^k)) \leq 3\sqrt{2}\tau(Ck^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta)$.
Or $\mathrm{diam}(\varphi([\mathbb{M}]^k)) = \sqrt{2k}\tau > \tau$ donc :

$$\tau < \mathrm{diam}(f \circ \varphi([\mathbb{M}]^k)) \leq 3\sqrt{2}\tau(Ck^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + \delta)$$

ce qui est absurde par choix de δ et de k. Donc $\ell_p(\ell_2) \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$.
• Cas $1 \leq p < 2$:
Supposons que $\ell_p(\ell_2) \underset{CL}{\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$.
Il existe alors $f : \ell_p(\ell_2) \to \ell_p \underset{\infty}{\oplus} \ell_2$ et $C \geq 1$ tels que, pour tous $x, y \in \ell_p(\ell_2)$, on ait :

$$\|x - y\| \geq 1 \implies \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

On peut écrire $f = (g, h)$ avec $g : \ell_p(\ell_2) \to \ell_p$ et $h : \ell_p(\ell_2) \to \ell_2$.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in]0, 1[$ tels que $3(\sqrt{2}Ck^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + \delta) < 1$.
Posons $Y = \overline{\mathrm{Vect}}\{e_{i,j}; i \leq k, j \geq 1\} \equiv \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \ell_2\right)_{\ell_p}$ et

$$\varphi : \begin{cases} Y & \to \quad \ell_2 \\ (y^1, \cdots, y^k) & \mapsto \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases} \quad \text{où } y_n = \begin{cases} y^r_{b+1} & \text{si } r \neq 0 \\ y^k_b & \text{si } r = 0 \end{cases} \text{ si } n = bk + r, 0 \leq r \leq k-1.$$

L'application φ est un isomorphisme linéaire et $\psi = g \circ \varphi^{-1} : \ell_2 \to \ell_p$ est une application grossièrement Lipschitzienne donc, comme $p < 2$, d'après la proposition 21, il existe $u \in \ell_2$, $\tau' > \|\varphi\|k$, $N' \geq k + 1$, $K \subset \ell_p$ compact tels que :

$$\psi(u + \tau' B_{E_{N'}}) \subset K + \frac{\delta}{\|\varphi\|}\tau' B_{\ell_p}$$

où $E_{N'} = \overline{\mathrm{Vect}}^{\ell_2}\{e'_i, i > N'\}$, $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ désignant la base canonique de ℓ_2.
Posons $\tau = \frac{\tau'}{\|\varphi\|} > k$, $y = \varphi^{-1}(u) \in Y$, $N = \left\lfloor \frac{N'}{k} \right\rfloor + 1$ et $E = \overline{\mathrm{Vect}}\{e_{i,j}; i \leq k, j > N\}$.
Montrons que $y + \tau B_E \subset \varphi^{-1}(u + \tau' B_{E_{N'}}) = y + \tau'\varphi^{-1}(B_{E_{N'}})$.
Soit $(y^1, \cdots, y^k) \in \tau B_E$. On a $\|\varphi(y^1, \cdots, y^k)\|_2 \leq \|\varphi\|\tau = \tau'$ et, si $n = bk + r \leq N'$ avec $0 \leq r \leq k - 1$, $b < N$, on a :

$$y_n = \begin{cases} y^k_b = 0 & \text{si } r = 0 \\ y^r_{b+1} = 0 & \text{si } r \neq 0 \end{cases} \text{ car } b + 1 \leq N.$$

Donc $y+\tau B_E \subset \varphi^{-1}(u+\tau' B_{E_{N'}}) = y+\tau'\varphi^{-1}(B_{E_{N'}})$, d'où $g(y+\tau B_E) \subset K+\delta\tau B_{\ell_p}$.
Posons $\mathbb{M} = \{j \in \mathbb{N}^*; j > N\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ et

$$\phi : \begin{cases} [\mathbb{M}]^k & \to \quad y+\tau B_E \\ (n_1,\cdots,n_k) & \mapsto \quad y+\tau k^{-1/p}\sum_{i=1}^k e_{i,n_i} \end{cases}.$$

Notons que $\mathrm{Lip}(\phi) = \sqrt{2}\tau k^{-1/p}$ et $\mathrm{Lip}(h\circ\phi) \leq C\sqrt{2}\tau k^{-1/p}$.
De plus, comme $g\circ\phi : [\mathbb{M}]^k \to K+\delta\tau B_{\ell_p}$, le corollaire 2 assure qu'il existe $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{M}]^\omega$ tel que $\mathrm{diam}(g\circ\phi([\mathbb{M}_0]^k)) < 3\delta\tau$.
Le théorème 9 assure quant à lui qu'il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}_0]^\omega$ tel que :

$$\mathrm{diam}(h\circ\phi([\mathbb{M}']^k)) \leq 3\sqrt{2}C\tau k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

On en déduit que :

$$\tau < \mathrm{diam}(\phi([\mathbb{M}']^k)) \leq \mathrm{diam}(f\circ\phi([\mathbb{M}']^k)) \leq 3\tau(\delta+2Ck^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}})$$

ce qui est absurde par choix de δ et de k. Donc $\ell_p(\ell_2) \underset{CL}{\not\hookrightarrow} \ell_p \oplus \ell_2$. $\square$

Terminons cette partie par une généralisation du théorème 9, qui nous servira plus loin et qui fait intervenir différents outils introduits dans la première partie de ce mémoire.

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, dans la fin de cette partie, on munit $[\mathbb{M}]^k$ de la distance suivante :

$$\forall \overline{n},\overline{m} \in [\mathbb{M}]^k, d(\overline{n},\overline{m}) = \sum_{\substack{j=1 \\ n_j\neq m_j}}^k a_j.$$

Notons qu'une fonction f définie sur $[\mathbb{M}]^k$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est Lipschitzienne si et seulement si elle est bornée.

Théorème 14. *Soit X un espace de Banach réflexif, $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\varepsilon > 0$, $f : [\mathbb{M}]^k \to X$ une application Lipschitzienne.*
Il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ tel que :

$$\mathrm{diam}(f([\mathbb{M}']^k)) < 2e\,\mathrm{Lip}(f)\|(a_1,\cdots,a_k)\|_{\ell_{\overline{\rho}_X}} + \varepsilon.$$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $N_1(t) = |t|$. Définissions une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$N_2(\xi,\eta) = \sup_{x\in S_X}\inf_{E\in\mathcal{E}}\sup_{y\in B_E}\|\xi x+\eta y\| = \begin{cases} |\xi|\overline{\rho}_X\left(\frac{|\eta|}{|\xi|}\right)+|\xi| & \text{si } \xi \neq 0 \\ |\eta| & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de X de codimension finie.
On a $N_2(0,1) = N_2(1,0) = 1$ et, d'après la proposition 11, pour tous $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|\xi_1| \leq |\xi_2|, |\eta_1| \leq |\eta_2| \implies N_2(\xi_1,\eta_1) \leq N_2(\xi_2,\eta_2).$$

Pour tout $k \geq 3$, définissions une norme sur $\mathbb{R}^k$ par récurrence en posant :

$$\forall(\xi_1, \cdots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k, N_k(\xi_1, \cdots, \xi_k) = N_2(N_{k-1}(\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}), \xi_k).$$

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons H_k : pour tout $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute $f : [\mathbb{M}]^k \to X$ Lipschitzienne, il existe $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $u \in X$ tels que :

$$\forall \overline{n} \in [\mathbb{M}']^k, \|f(\overline{n}) - u)\| < N_k(a_1, \cdots, a_k) \operatorname{Lip}(f) + \varepsilon.$$

$*$ Montrons que H_1 est vraie.
Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\varepsilon > 0$, $f : \mathbb{M} \to X$ Lipschitzienne.
L'espace X est réflexif et la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{M}}$ est bornée donc il existe $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $u \in X$ tels que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{M}_0}$ converge faiblement vers u. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{M}_0, \|f(n) - u\| \leq \limsup_{m\in\mathbb{M}_0\to\infty} \|f(n) - f(m)\| \leq \operatorname{Lip}(f)a_1 \leq N_1(a_1) \operatorname{Lip}(f) + \varepsilon$$

donc H_1 est vraie.
$*$ Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que H_{k-1} soit vraie. Montrons H_k.
Soit $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}]^\omega$, $\varepsilon > 0$, $f : [\mathbb{M}]^k \to X$ Lipschitzienne.
Grâce à la compacité faible donnée par la réflexivité de X et une extraction diagonale, il existe $\mathbb{M}_0 \in [\mathbb{M}]^\omega$ et $\tilde{f} : [\mathbb{M}_0]^{k-1} \to X$ tels que :

$$\forall \overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}_0]^{k-1}, \omega - \lim_{n_k\in\mathbb{M}_0\to\infty} f(n_1, \cdots, n_{k-1}, n_k) = \tilde{f}(\overline{n}).$$

L'application $\tilde{f}$ est Lipschitzienne avec $\operatorname{Lip}(\tilde{f}) \leq \operatorname{Lip}(f)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathbb{M}_1 \in [\mathbb{M}_0]^\omega$ et $u \in X$ tels que :

$$\forall \overline{n} \in [\mathbb{M}_1]^{k-1}, \|\tilde{f}(\overline{n}) - u\| \leq \operatorname{Lip}(\tilde{f})N_{k-1}(a_1, \cdots, a_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le corollaire 1 assure alors l'existence de $\mathbb{M}' \in [\mathbb{M}_1]^\omega \subset [\mathbb{M}]^\omega$ vérifiant :

$$\forall \overline{n}, \overline{m} \in [\mathbb{M}']^{k-1}, \Big| \|\tilde{f}(\overline{n}) - u\| - \|\tilde{f}(\overline{m}) - u| \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\star).$$

Pour tout $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}']^{k-1}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|f(n_1, \cdots n_k) - u\| &= \limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|\tilde{f}(\overline{n}) - u + f(n_1, \cdots, n_k) - \tilde{f}(\overline{n})\| \\ &\leq N_2\left(\|\tilde{f}(\overline{n}) - u\|, \limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|f(n_1, \cdots, n_k) - \tilde{f}(\overline{n})\|\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}']^{k-1}$, on a :

$$\limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|f(n_1, \cdots, n_k) - \tilde{f}(\overline{n})\| \leq \limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \limsup_{m_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|f(n_1, \cdots, n_k) - f(n_1, \cdots, m_k)\| \leq \operatorname{Lip}(f)a_k$$

d'où, pour tout $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_{k-1}) \in [\mathbb{M}']^{k-1}$:

$$\begin{aligned}\limsup_{n_k\in\mathbb{M}'\to\infty} \|f(n_1, \cdots n_k) - u\| &\leq \operatorname{Lip}(f)N_2\left(N_{k-1}(a_1, \cdots, a_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{2\operatorname{Lip}(f)}, a_k\right) \\ &\overset{\text{IT}}{\leq} \operatorname{Lip}(f)\left(N_2(N_{k-1}(a_1, \cdots, a_{k-1}), a_k) + \frac{\varepsilon}{2\operatorname{Lip}(f)}N(1,0)\right) \\ &= \operatorname{Lip}(f)N_k(a_1, \cdots, a_k) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Déduisons alors H_k de cette observation.
Pour tout $\overline{n} = (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{M}']^k$, par $(\star)$, on a :

$$\forall m_k > n_{k-1}, \|f(\overline{n}) - u\| < \|f(n_1, \cdots, n_{k-1}, m_k) - u\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\|f(\overline{n}) - u)\| < N_k(a_1, \cdots, a_k)\,\mathrm{Lip}(f) + \varepsilon$.
Donc H_k est vraie.
Le principe de récurrence assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, H_k est vraie.
• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 2, comme $C_{\overline{\rho}_X} \geq 1$, on a :

$$\forall (\xi_1, \cdots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k, N_k(\xi_1, \cdots, \xi_k) \leq e\|(\xi_1, \cdots, \xi_k)\|_{\ell_{\overline{\rho}_X}}$$

d'où le résultat. $\square$

3 Article de Kalton

3.1 Premières définitions et propriétés

Cette sous-partie est dédiée à l'introduction de différentes notions : les modules de lissité et de convexité, plusieurs propriétés d'approximation, les propriétés (m_p) et $(\tilde{m_p})$ et, pour finir, les modèles étalés.

3.1.1 Modules de lissité et de convexité

Commençons par introduire les modules de lissité et de convexité.

Définition 18. *Soit X un espace de Banach.*
• *Le module de lissité de X est l'application définie par :*

$$\begin{aligned}\forall \tau \geq 0, \rho_X(\tau) &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} - 1; x \in S_X, y \in \tau S_X\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} - 1; x \in B_X, y \in \tau B_X\right\};\end{aligned}$$

• *Le module de convexité de X est l'application définie par :*

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon \in [0,2], \delta_X(\varepsilon) &= \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2}; (x,y) \in S_X^2, \|x-y\| = \varepsilon\right\}\\ &= \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2}; (x,y) \in B_X^2, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Définition 19. *Soit $p \in [1,2]$, $q \in [2,+\infty[$, X un espace de Banach.*
• *On dit que X est p-uniformément lisse s'il existe $C > 0$ vérifiant :*

$$\forall \tau \geq 0, \rho_X(\tau) \leq C\tau^p;$$

• *On dit que X est q-uniformément convexe s'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :*

$$\forall \varepsilon \in [0,2], \delta_X(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q.$$

Dans [2], on pourra trouver une démonstration du résultat suivant :

Proposition 22. *Soit $p \in [1,2]$, p' son exposant conjugué, $q \in [2,+\infty[$, X un espace de Banach.*
(i) L'espace X est p-uniformément lisse si et seulement s'il existe $C > 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in X^2, \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} \leq \|x\|^p + C^p\|y\|^p;$$

(ii) L'espace X est q-uniformément convexe si et seulement s'il existe $C > 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x\|^p + C^p\|y\|^p \leq \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2};$$

(iii) L'espace X est p-uniformément lisse si et seulement si X^* est p'-uniformément convexe.

3.1.2 Diverses propriétés d'approximation

Introduisons désormais les propriétés d'approximation que nous utiliserons par la suite.

Définition 20. *Soit X un espace de Banach séparable.*
• *On dit que X a la propriété d'approximation (AP) si, pour tout sous-espace $K \subset X$ compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur $T : X \to X$ de rang fini tel que :*

$$\forall x \in K, \|Tx - x\| < \varepsilon.$$

• *On dit que X a la propriété d'approximation bornée (BAP) s'il existe une suite bornée $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'opérateurs de rang fini de X dans X telle que, pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = x$.*
• *Une suite bornée $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'opérateurs de rang fini de X dans X telle que, pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = x$ et, pour tout $n < m$, $T_m T_n = T_n$, est appelée une suite approximante sur X.*
• *On dit que X a la propriété d'approximation métrique (MAP) s'il admet une suite approximante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n\| = 1$.*
• *On dit que X a la propriété d'approximation métrique commutative $(CMAP)$ s'il admet une suite approximante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n\| = 1$ et, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $T_n T_m = T_m T_n$.*
• *On dit que X a la propriété d'approximation uniforme (UAP) s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, si F est un sous-espace de X de dimension m, on puisse trouver un opérateur $T : X \to X$ vérifiant $rg(T) \le n$, $\|T\| \le C$ et $T_{|F} = Id_F$.*

On utilisera les résultats suivants, dont on pourra trouver une démonstration dans le chapitre 7 du premier volume de [15] :

Théorème 15. *Tout espace dual séparable avec (AP) a (MAP).*

Théorème 16. *Tout espace de Banach séparable avec (MAP) a $(CMAP)$.*

En combinant ces deux résultats avec le théorème 4.9 de [15], on obtient :

Théorème 17. *Soit X un espace de Banach réflexif et séparable, ayant la propriété (AP). Il existe une suite approximante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur X telle que, pour tout $x \in X^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n^* x^* = x^*$ et, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, $T_n T_m = T_m T_n$.*

3.1.3 Propriétés (m_p) et $(\tilde{m_p})$

Les propriétés (m_p) et $(\tilde{m_p})$ sont définies de la façon suivante :

Définition 21. *Soit X un espace de Banach séparable, $p \in]1, +\infty[$.*
• *On dit que X a la propriété (m_p) si, pour tout $x \in X$, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ faiblement nulle, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x + x_n\|^p = \|x\|^p + \lim_{n\to+\infty} \|x_n\|^p$$

dès que les limites existent.
• *On dit que X a la propriété $(\tilde{m_p})$ s'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'espaces vectoriels de dimension finie telle que X soit isomorphe à un sous-espace fermé de $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.*

Remarque 17. *On note que, si l'espace X a la propriété $(\tilde{m}_p)$, alors il admet une norme équivalente avec laquelle il a la propriété (m_p).*

On dispose de la caractérisation suivante de la propriété $(\tilde{m}_p)$, $1 < p < +\infty$ (cf [16], Proposition 2.11) :

Théorème 18. *Soit $1 < p < +\infty$, X un espace de Banach réflexif séparable.*
L'espace X a la propriété $(\tilde{m}_p)$ si et seulement si (X est isomorphe à un espace p-AUS et X est isomorphe à un espace p-AUC).

3.1.4 Modèles étalés

Introduit par Brunel et Sucheston dans les années 70, le concept de modèle étalé s'avère très utile en théorie des espaces de Banach. Nous nous contenterons ici de définir rapidement les modèles étalés et de citer deux résultat que nous utiliserons par la suite (cf [1] et [3]).

Définition 22. • *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ est dite étalante si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{p_j}\right\| = \left\|\sum_{=1}^{n} a_j x_j\right\|.$$

• *Le terme espace de suites désigne le complété S de c_{00} avec une norme $\|.\|_S$ telle que les vecteurs de base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soient de norme 1.*
• *Un espace de suites S est dit étalé si la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S est étalante.*

Grâce à la théorie de Ramsey, on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 19. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite normalisée telle que $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ soit non relativement compacte.*
Il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un espace de suites étalé $(S, \|.\|_S)$ tel que, si $\mathbb{M} = \{n_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, on ait :

$$\lim_{(p_1,\cdots,p_r)\in[\mathbb{M}]^r} \left\|\sum_{j=1}^{r} a_j x_{p_j}\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{r} a_j e_j\right\|_S.$$

L'espace de suites étalé $(S, \|.\|_S)$ est appelée modèle étalé associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Nous admettrons les deux théorèmes suivants concernant les modèles étalés.

Théorème 20. *Soit X un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite étalante, S le modèle étalé associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
L'espace S est finiment représentable dans X.

Théorème 21. *Soit X un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite étalante, S le modèle étalé associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers 0 dans X, alors la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S est 2-inconditionnelle.

Pour finir, définissons les propriétés p-Banach-Saks et p-co-Banach-Saks, $p \in]1, +\infty[$.

Définition 23. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach ne contenant pas ℓ_1, $p \in]1, +\infty[$.*
• *On dit que X a la propriété p-Banach-Saks s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout modèle étalé $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ d'une suite normalisée faiblement nulle, on ait :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j\right\|_S \leq Ck^{\frac{1}{p}}$$

i.e il existe une constante $C' > 0$ telle que toute suite normalisée faiblement nulle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ admette une sous-suite $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k, \left\|\sum_{j=1}^{k} x_{n_j}\right\| \leq C'k^{\frac{1}{p}}.$$

• *On dit que X a la propriété p-co-Banach-Saks s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout modèle étalé $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ d'une suite normalisée faiblement nulle, on ait :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j\right\|_S \geq ck^{\frac{1}{p}}$$

i.e il existe une constante $c' > 0$ telle que toute suite normalisée faiblement nulle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ admette une sous-suite $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k, \left\|\sum_{j=1}^{k} x_{n_j}\right\| \geq c'k^{\frac{1}{p}}.$$

3.2 Unicité de la structure de réseau de $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{\ell_p}$

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que, si un couple $(p, r) \in]1, +\infty[^2$ vérifie $p < \min(r, 2)$ ou $p > \max(r, 2)$, alors l'espace $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{\ell_p}$ admet une unique structure de réseau. Pour cela, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats.
Commençons par la définition d'une variante de $\overline{\delta}_X$ et l'introduction d'une notation.

Définition 24. *Soit X un espace de Banach. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :*

$$\hat{\delta}_X(t) = \inf_{x\in S_X} \sup_{E\in\mathcal{E}} \inf_{y\in S_E} \left\{\frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1\right\}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des sous-espaces fermés de X de codimension finie.

Remarque 18. • *On montre comme dans la partie 1.5 que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\hat{\delta}_X(t) = \inf_{x\in S_X} \sup_{E\in\mathcal{E}} \inf_{\substack{y\in E\\ \|y\|\geq 1}} \left\{\frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1\right\}.$$

• *Comme pour $\overline{\delta}_X$, la fonction $t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\hat{\delta}_X(t)}{t}$ est croissante donc $\hat{\delta}_X$ est équivalente à une fonction convexe.*
• *On note que $\overline{\delta}_X \leq \hat{\delta}_X$.*

Notations 5. *Soit X un espace de Banach. Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$, on note :*

$$\mathrm{Sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \inf_{n\neq m\in\mathbb{N}^*} \|x_n - x_m\|.$$

Commençons par énoncer deux lemmes.

Lemme 6. *Soit X un espace de Banach, $(u,v) \in X^2$ tel que $\|u - v\| = 1$.*
Supposons que, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\|u - x_m\| + \|v - x_m\| > 1 + \hat{\delta}_X(\mathrm{Sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) - \nu.$$

Alors, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$, on a :

$$\liminf_{m\to\infty}(\|u - x_m\| + \|v - x_m\|) \geq 1 + \hat{\delta}_X(\mathrm{Sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}).$$

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée. Posons $t = \mathrm{Sep}(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il existe une sous-suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\liminf_{m\to\infty}(\|u - y_m\| + \|v - y_m\|) = \lim_{m\to\infty}(\|u - z_m\| + \|v - z_m\|).$$

On veut montrer que :

$$\forall\nu > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N; \|u - z_n\| + \|v - z_n\| \geq 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu.$$

Or, pour tout $\nu > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la suite $(z_{N-1+n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée donc, par hypothèse, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\|u - z_{N-1+m}\| + \|v - z_{N-1+m}\| > 1 + \hat{\delta}_X(\mathrm{Sep}(z_{N-1+n})_{n\in\mathbb{N}^*}) - \nu \geq 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu$$

ce qui assure le résultat. □

Lemme 7. *Soit X un espace de Banach, E un sous-espace vectoriel de X, $\nu > 0$, $t > \nu$, $x \in X$ vérifiant $\|x\| \geq t$ et $d(x, E) < \frac{\nu}{2}$.*
Il existe $z \in S_E$ et $\tau > t$ tels que $\|x - \tau z\| < \nu$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $y \in E$ tel que $\|x - y\| < \frac{\nu}{2}$. Si $\|y\| > t$, on a le résultat donc on peut supposer $\|y\| \leq t$. Notons que :

$$t \geq \|y\| \geq \|x\| - \|x - y\| > t - \frac{\nu}{2}.$$

Posons alors :

$$r = \|y\| - \left(t - \frac{\nu}{2}\right) \in \left]0, \frac{\nu}{2}\right], \quad k = \frac{\frac{\nu}{2}}{t - \frac{\nu}{2} + r} > 0 \text{ et } z = (1+k)y \in E.$$

On a :

$$\|z\| = \frac{t + r}{t - \frac{\nu}{2} + r}\|y\| = t + r > t \text{ et } \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} = \nu$$

d'où le résultat. □

Ces deux lemmes permettent de démontrer la proposition suivante.

Proposition 23. *Soit X un espace de Banach, $(u,v) \in X^2$ tel que $\|u-v\| = 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite bornée, $t = \mathrm{Sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a :*

$$\liminf_{n\to\infty}(\|u-x_n\| + \|v-x_n\|) \geq 1 + \hat{\delta}_X(t).$$

Démonstration. Soit $\nu \in]0,t[$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite bornée. D'après le lemme 6, il suffit de montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\|u-x_m\| + \|v-x_m\| > 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu.$$

Par définition de $\hat{\delta}_X(t)$, il existe un sous-espace vectoriel E de X de codimension finie tel que, pour tout $y \in E$ vérifiant $\|y\| \geq 1$, on ait :

$$\frac{\|u-v+ty\| + \|u-v-ty\|}{2} \geq 1 + \hat{\delta}_X(t) - \frac{\nu}{2}.$$

$*$ Montrons qu'il existe $n \neq m \in \mathbb{N}^*$ tels que $d(x_m - x_n, E) < \frac{\nu}{4}$.
Il existe un sous-espace F de X de dimension finie tel que $X = E \oplus F$ et une projection linéaire continue $P : X \to F$ de X sur F.
Supposons par l'absurde que, pour tous $m \neq n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \in E$, on ait $\|x_m - x_n - y\| \geq \frac{\nu}{4}$.
Alors, pour tous $m \neq n \in \mathbb{N}^*$, $\|P(x_m) - P(x_n)\| \geq \frac{\nu}{4}$, ce qui est impossible car, d'après la théorème de Bolzano-Weierstrass, $(P(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente.
Donc il existe $n \neq m \in \mathbb{N}^*$ tels que $d(x_m - x_n, E) < \frac{\nu}{4}$.
$*$ D'après le lemme 7, il existe $z \in S_E$, $\tau > t$ tels que $\|x_m - x_n - \tau z\| < \frac{\nu}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|u-v+(x_m-x_n)\| + \|u-v-(x_m-x_n)\|) &\geq \frac{1}{2}\left(\|u-v+\tau z\| - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\|u-v-\tau z\| - \frac{\nu}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|u-v+t\frac{\tau}{t}z\right\|\right) + \frac{1}{2}\left(\left\|u-v-t\frac{\tau}{t}z\right\|\right) - \frac{\nu}{2} \\
&\geq 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\|u-x_m\| + \|v-x_m\|) + \frac{1}{2}(\|u-x_n\| + \|v-x_n\|) \\
&= \frac{1}{2}(\|u-x_n\| + \|v-x_m\|) + \frac{1}{2}(\|u-x_m\| + \|v-x_n\|) \\
&\geq 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|u-x_m\| + \|v-x_m\| > 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu \text{ ou } \|u-x_n\| + \|v-x_n\| > 1 + \hat{\delta}_X(t) - \nu$$

ce qui conclut. □

Prouvons désormais le résultat ci-dessous concernant les suites sous-additives.

Lemme 8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ une suite sous-additive (i.e $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tous $m,n \in \mathbb{N}^*$).*
La suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$.

Démonstration. Posons $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition de α, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\alpha \leq \frac{u_p}{p} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe également $n_0 \geq p$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{\max\limits_{1\leq j\leq p-1} u_j}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \geq n_0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [|0, p-1|]$ tels que $n = kp + r$. Par hypothèse, on note que $u_n \leq ku_p + u_r$. On a alors :

$$\alpha \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{k}{kp+r} u_p + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{\max\limits_{1\leq j\leq p-1} u_j}{n} \leq \alpha + \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Grâce à ce résultat, on peut prouver le lemme suivant :

Lemme 9. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ un modèle étalé d'une suite normalisée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sup_{(\eta_1,\cdots,\eta_k)\in\{-1,1\}^k} \left\| \sum_{j=1}^{k} \eta_j e_j \right\|_S \leq 3 \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j \right\|_S.$$

De plus, si X est super-réflexif et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} e_j \right\|_S \leq 2\mathbb{E}\left(\left\| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j e_j \right\|_S \right).$$

Démonstration. • Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{(\eta_1,\cdots,\eta_k)\in\{-1,1\}^k} \left\| \sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j e_j \right\|_S \leq 3 \left\| \sum\limits_{j=1}^{k} e_j \right\|_S$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\alpha_k = \left\| \sum\limits_{j=1}^{k} e_j \right\|_S$.
Les propriétés des modèles étalés assurent que :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}^*, \alpha_{k+l} = \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j + \sum_{j=k+1}^{k+l} e_j \right\|_S \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j \right\|_S + \left\| \sum_{j=k+1}^{k+l} e_j \right\|_S = \alpha_k + \alpha_l.$$

D'après le lemme précédent, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \theta$, avec $\theta = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha_n}{n}$.
Pour tous $l, k, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j + \frac{1}{m} \sum_{j=k+1}^{k+ml} e_j \right\|_S &= \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j + \frac{1}{m} \sum_{d=1}^{m} \sum_{j=k+(d-1)l+1}^{k+dl} e_j \right\|_S \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j + \frac{1}{m} \times m \times \sum_{j=k+1}^{k+l} e_j \right\|_S = \alpha_{k+l} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\alpha_k - \frac{1}{m}\alpha_{ml} &= \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j\right\|_S - \left\|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{ml} e_j\right\|_S = \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j\right\|_S - \left\|\frac{1}{m}\sum_{j=k+1}^{k+ml} e_j\right\|_S \\ &\leq \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j + \frac{1}{m}\sum_{j=k+1}^{k+ml} e_j\right\|_S \leq \alpha_{k+l}\end{aligned}$$

d'où $\alpha_k \leq \alpha_{k+l} + \frac{1}{m}\alpha_{ml} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_{k+l} + l\theta$.
Notons que, par définition de θ, pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+l} + l\theta \leq \alpha_{k+l} + l\frac{\alpha_{k+l}}{k+l} = \frac{k+2l}{k+l}\alpha_{k+l}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in [|1, k|]$, on a donc :

$$\alpha_j + \alpha_{k-j} \leq \frac{j+2(k-j)}{j+k-j}\alpha_k + \frac{k-j+2j}{k-j+j}\alpha_k = 3\alpha_k$$

d'où $\max\limits_{0\leq j\leq k}(\alpha_j + \alpha_{k-j}) \leq 3\alpha_k$.
Soit alors $(\eta_1, \cdots, \eta_k) \in \{-1, 1\}^k$. Pour $j = \mathrm{Card}\{i \in [|1, n|]; \eta_i = 1\}$, on a :

$$\left\|\sum_{j=1}^{k} \eta_j e_j\right\|_S \leq \left\|\sum_{\substack{i=1\\ \eta_i=1}}^{k} e_i\right\|_S + \left\|\sum_{\substack{i=1\\ \eta_i=-1}}^{k} e_i\right\|_S = \alpha_j + \alpha_{k-j} \leq 3\alpha_k.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{(\eta_1,\cdots,\eta_k)\in\{-1,1\}^k} \left\|\sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j e_j\right\|_S \leq 3\left\|\sum\limits_{j=1}^{k} e_j\right\|_S$.

• Supposons désormais X super-réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ faiblement nulle.
Notons S le modèle étalé associé à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base.
L'espace S est finiment représentable dans X qui est super-réflexif par hypothèse, donc S est réflexif d'où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est contractante et donc faiblement nulle (cf [1], p.57).
La proposition 12.3.6 de [1] assure alors que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 2-inconditionnelle. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall(\eta_1, \cdots, \eta_k) \in \{-1, 1\}^k, \left\|\sum_{j=1}^{k} e_j\right\|_S \leq 2\left\|\sum_{j=1}^{k} \eta_j e_j\right\|_S$$

d'où le résultat. □

Remarque 19. *Grâce au théorème 21, on note que l'hypothèse de super-réflexivité peut être omise.*

Énonçons désormais une relation de dualité entre les propriétés p-Banach-Saks et q-co-Banach-Saks, où $p, q \in]1, +\infty[$ sont conjugués.

Proposition 24. *Soit $1 < p < \infty$, q son exposant conjugué, X un espace de Banach réflexif avec la propriété p-Banach-Saks.*
Alors X^* a la propriété q-co-Banach-Saks.

Démonstration. Notons pour commencer que, comme X est réflexif, X^* l'est également donc aucun de ces deux espaces ne contient ℓ_1.
Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout modèle étalé $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ d'une suite normalisée faiblement nulle de X, on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{j=1}^{k} e_j \right\|_S \leq C k^{\frac{1}{p}}$$

Il suffit de montrer qu'il existe $C' > 0$ telle que toute suite $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X^*$ normalisée faiblement nulle admette une sous-suite $(x_{n_j}^*)_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \lim_{(n_1,\cdots,n_k)\to\infty} \|x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*\| \geq C' k^{1/q}.$$

Soit $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X^*$ une suite normalisée faiblement nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in S_X$ tel que $x_n^*(x_n) = 1$ puisque X^* est réflexif. Grâce à la réflexivité de X, quitte à extraire, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in B_X$ faiblement. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n - x\| \leq 2$.
Comme $x_n^* \xrightarrow{\omega} 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n^*(x_n) = 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en norme vers 0 donc, quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\|x_n - x\| \geq \delta$.
On peut alors poser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \dfrac{x_n - x}{2} \in B_X$ et $u_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|} \in S_X$. Un modèle étalé $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de la forme $(\|y_n\| f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un modèle étalé de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est normalisée faiblement nulle, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{j=1}^{k} f_j \right\|_S \leq C k^{\frac{1}{p}}.$$

Or la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 2-inconditionnelle et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset B_X$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\| \sum_{j=1}^{k} d_j \right\|_S \leq 2C k^{\frac{1}{p}}.$$

Il existe donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une constante $D > 0$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n_1 < \cdots < n_k, \|x_{n_1} + \cdots x_{n_k} - kx\| \leq D k^{\frac{1}{p}}.$$

Notons $\Pi : X \to X^{**}$ l'application canonique. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n_1 < \cdots < n_k$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x_{n_1} + \cdots x_{n_k} - kx, x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^* \rangle &= \sum_{j=1}^{k-1} x_{n_j}^*(x_{n_k} - x) + 1 - \Pi(x)(x_{n_k}) \\
&\quad + \langle x_{n_1} + \cdots x_{n_{k-1}} - (k-1)x, x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_{k-1}}^* \rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \Pi(x_{n_j} - x)(x_{n_k}^*) \\
&\underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} 1 + \langle x_{n_1} + \cdots x_{n_{k-1}} - (k-1)x, x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_{k-1}}^* \rangle.
\end{aligned}$$

On montre ainsi par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n_1\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \langle x_{n_1} + \cdots x_{n_k} - kx, x^*_{n_1} + \cdots + x^*_{n_k} \rangle = k.$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$k \leq \lim_{(n_1,\cdots,n_k)\to\infty} \|x^*_{n_1} + \cdots x^*_{n_k}\| \times Dk^{\frac{1}{p}}$$

d'où :

$$\lim_{(n_1,\cdots,n_k)\to\infty} \|x^*_{n_1} + \cdots x^*_{n_k}\| \geq \frac{1}{D} k^{\frac{1}{q}}$$

ce qui assure le résultat. □

La prochaine proposition requiert l'introduction de vocabulaire.

Définition 25. *Soit E, F deux espaces de Banach. On rappelle que l'espace des opérateurs compacts de E dans F, noté $K(E,F)$, est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E,F)$, l'espace des applications linéaire continues de E dans F.*
• La topologie faible d'opérateurs ω est définie par les applications linéaires $T \in \mathscr{L}(E,F) \mapsto f^*(Te)$, où $f^* \in F^*$, $e \in E$.
• La topologie duale faible d'opérateurs ω' est définie par les applications linéaires $T \in \mathscr{L}(E,F) \mapsto e^{**}(T^*f^*)$, où $e^{**} \in E^{**}$, $f^* \in F^*$.

Remarque 20. *D'après le corollaire 1 de [18], si E est réflexif, alors un sous-ensemble A de $K(E,F)$ est faiblement compact si et seulement si il est ω-compact.*

Proposition 25. *Soit $1 < p < +\infty$, X un Banach séparable avec $(\tilde{m}_p)$ et (AP).*
Il existe une suite d'opérateurs de rang fini $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X^X$ vérifiant :
(i) pour tous $k, j \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $|j-k| > 1$, $A_jA_k = 0$;
(ii) pour tout $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$;
(iii) il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait :

$$\frac{1}{C}\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|x\|.$$

Démonstration. Comme X a $(\tilde{m}_p)$, on peut supposer que X est un sous-espace d'un espace $Z = \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n\right)_{\ell_p}$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(G_n) < +\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n : \left\{ \begin{array}{lcl} Z & \to & Z \\ (x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0, \cdots) \end{array} \right.$ et $S_0 = 0$.
• L'espace X est réflexif séparable donc, d'après le théorème 17, il existe une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X^X$ d'opérateurs de rang fini telle que, pour tout $x \in X$, $x = \lim_{n\to+\infty} R_n x$, pour tout $x^* \in X^*$, $x^* = \lim_{n\to+\infty} R^*_n x^*$ et, pour tout $m > n$, $R_mR_n = R_nR_m = R_n$.
On peut voir S_n et R_n, $n \in \mathbb{N}^*$, comme des éléments de $K(X,Z)$. Le théorème de Schauder assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n, R_n \in K(Z^*, X^*)$.
Pour tout $x^{**} = x \in X^{**}$ (X est réflexif), comme $\lim_{n\to+\infty} R_n x = \lim_{n\to+\infty} S_n x = x$, pour tout $z^* \in Z^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x^{**}(S^*_n - R^*_n)z^* = \lim_{n\to+\infty} z^*((S_n - R_n)x) = 0$$

donc $S_n - R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans ω'.
On déduit alors du corollaire 3 de [18], qui assure qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un opérateur T compact pour ω' converge vers T dans ω, que $S_n - R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour ω.
• Appliquons désormais le théorème de Mazur.
Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{1}{8}$. D'après le théorème de Mazur et la remarque précédente, il existe une suite $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $m_0 = 0$, et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j = 1 \text{ et } \left\| \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j(S_j - R_j) \right\|_{X\to Z} < \varepsilon_k.$$

Posons $v_0 = T_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = \sum\limits_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j R_j$ et $T_k = \sum\limits_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j S_j$, $A_k = V_k - V_{k-1}$ et $B_k = T_k - T_{k-1}$.
$*$ Soit $j, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $|j-k| > 1$. Comme $A_j A_k = A_k A_j$, on peut supposer $j > k$. On a alors :

$$A_j A_k = (V_j - V_{j-1})(V_k - V_{k-1}) = V_j V_k - V_{j-1} V_k - V_j V_{k-1} + V_{j-1} V_{k-1} = V_k - V_k - V_{k-1} + V_{k-1} = 0$$

par choix des $(a_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$; et :

$$\|A_k - B_k\| \leq \|V_k - T_k\| + \|V_{k-1} - T_{k-1}\| < \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

On a donc, pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|(A_k - B_k)x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})^p \|x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) \\
&\leq \frac{1}{4}\|x\|.
\end{aligned}$$

$*$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in X$. On a :

$$T_k x = (x_1, \cdots, x_{m_{k-1}+1}, (1 - a_{m_{k-1}+1}) x_{m_{k-1}+2}, \cdots, a_{m_k} x_{m_k}, 0, \cdots, 0, \cdots)$$

et :

$$T_{k-1} x = (x_1, \cdots, x_{m_{k-2}+1}, (1 - a_{m_{k-2}+1}) x_{m_{k-2}+2}, \cdots, a_{m_{k-1}} x_{m_{k-1}}, 0, \cdots, 0, \cdots)$$

donc :

$$\begin{aligned}
T_k x - T_{k-1} x = &(0, \cdots, 0, a_{m_{k-2}+1} x_{m_{k-2}+2}, \cdots, (1 - a_{m_{k-1}}) x_{m_{k-1}}, x_{m_{k-1}+1}, \\
&(1 - a_{m_{k-1}+1}) x_{m_{k-1}+2}, \cdots, a_{m_k}, x_{m_k}, 0, \cdots, 0, \cdots)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|B_kx\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|T_kx - T_{k-1}x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\|x_1\|^p + (1-a_1)^p\|x_2\|^p + \cdots + a_{m_1}^p\|x_{m_1}\|^p + a_1^p\|x_2\|^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(2\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|x\|\end{aligned}$$

et, comme la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^p$ est convexe, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|B_kx\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^p}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2}\|x\|.$$

Donc, pour tout $x \in X$, on a :

$$\frac{1}{2}\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|B_kx\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|x\|$$

d'où, pour tout $x \in X$:

$$\frac{1}{4}\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|A_kx\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{9}{4}\|x\|$$

ce qui permet de conclure, avec $C = 4$, car, pour tout $x \in X$, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_kx$ par construction. $\square$

La proposition précédente permet de prouver le théorème ci-dessous.

Théorème 22. *Soit $1 < p < +\infty$, X un espace de Banach séparable avec $(\tilde{m}_p)$ et (AP). Si X est un sous-espace complémenté dans un espace de Banach Y, et $(E_i)_{i\in I}$ est une famille dirigée de sous-espaces de dimension finie de Y avec $\bigcup\limits_{i\in I} E_i$ dense dans Y, alors X est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_{i_n}\right)_{\ell_p}$ pour une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset I$.*
En particulier, il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sous-espaces de dimension finie de X telle que X soit linéairement isomorphe à un sous-espace complémenté de $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p}$.

Démonstration. Notons $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite d'opérateurs de rang fini donnée par la proposition 25.
• Étape 1 : Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $i_n \in I$ et H_n un sous-espace vectoriel de Y de dimension finie vérifiant :

$$d(H_n, E_{i_n}) \leq 2 \text{ et } A_n(X) \subset H_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $d_n = \dim(A_n(X))$ et $(x_1, \cdots, x_{d_n})$ une base normalisée de $A_n(X)$.
Pour tout $k \in [|1, d_n|]$, la projection $\left\{\begin{array}{ccc} A_n(X) & \to & \langle x_1, \cdots, x_k\rangle \\ \sum\limits_{l=1}^{d_n} a_ix_i & \mapsto & \sum\limits_{l=1}^{k} a_ix_i \end{array}\right.$ est continue donc on peut

poser $K = \max\limits_{1\leq k\leq d_n} \|P_k\|$.

Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\varepsilon < \dfrac{1}{2Kd_n}$ et $\dfrac{1+2Kd_n\varepsilon}{1-2Kd_n\varepsilon} < 2$.

Par hypothèse, pour tout $j \in [|1, d_n|]$, il existe $y_j \in \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ tel que $\|x_j - y_j\| \leq \varepsilon$. Comme $(E_i)_{i\in I}$ est une famille dirigée, il existe $i_n \in I$ tel que $y_1, \cdots, y_{d_n} \in E_{i_n}$.

Montrons que la famille $(y_1, \cdots, y_{d_n})$ est libre.

Soit $(a_1, \cdots, a_{d_n}) \in \mathbb{R}^{d_n}$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{d_n} a_j y_j = 0$. Il suffit de montrer que $x := \sum\limits_{j=1}^{d_n} a_j x_j = 0$.

On a :

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{d_n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{d_n} a_j y_j\right\| \leq \max_{1\leq j\leq d_n} |a_j| d_n\varepsilon = \max_{1\leq j\leq d_n} \|P_j x - P_{j-1}x\| d_n \varepsilon \leq 2Kd_n\varepsilon\|x\|$$

où on a posé $P_0 = 0$. Donc $(1 - 2Kd_n\varepsilon)\|x\| \leq 0$, avec $1 - 2Kd_n\varepsilon > 0$, d'où $x = 0$.

Donc $(y_1, \cdots, y_{d_n})$ forme bien une famille libre.

On peut alors compléter $(y_1, \cdots, y_{d_n})$ en une base $(y_1, \cdots, y_{d_n}, y_{d_n+1}, \cdots, y_{k_n})$ de E_{i_n}, avec $k_n = \dim(E_{i_n})$.

Posons $H_n = \langle x_1, \cdots, x_{d_n}, y_{d_n+1}, \cdots, y_{k_n}\rangle$ et notons T l'application linéaire définie de H_n dans E_{i_n} vérifiant : pour tout $j \in [|1, d_n|]$, $T(x_j) = y_j$ et $T_{|\langle y_{d_n+1}, \cdots, y_{k_n}\rangle} = Id_{\langle y_{d_n+1}, \cdots, y_{k_n}\rangle}$.

Pour tout $x \in H_n$, $\|x - Tx\| \leq 2Kd_n\varepsilon\|x\|$ donc :

$$(1 - 2Kd_n\varepsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + 2Kd_n\varepsilon)\|x\|$$

ce qui conclut la première étape par choix de ε.

• Puisque X est complémenté dans Y, il existe une projection linéaire continue $P : Y \to X$.

Justifions la définition de $Q : \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p} & \to \quad X \\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto \quad \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ |j-k|\leq 1}} A_j P h_k \end{cases}$.

• Étape 2 : Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(X)\right)_{\ell_p}$ à support fini. Montrons que, pour tout $j \in [|0, 2|]$, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_{3k-j}\right\| \leq 3C^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{3k-j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $j \in [|0, 2|]$. On a :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_{3k-j}\right\| &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|A_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{3k-j}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{3n} x_{3k-j}\right\|^p + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{3n-1} x_{3k-j}\right\|^p + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} A_{3n-2} x_{3k-j}\right\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En distinguant les cas selon la valeurs de j, on montre que :

$$C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_{3n}x_{3k-j}\right\|^p+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_{3n-1}x_{3k-j}\right\|^p+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_{3n-2}x_{3k-j}\right\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|A_{3k-j+1}x_{3k-j}\|^p+\|A_{3k-j}x_{3k-j}\|^p+\|A_{3k-j-1}x_{3k-j}\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où, pour tout $j \in [|0,2|]$, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_{3k-j}\right\| \le 3C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\|A_l x_{3k-j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 3C\left(\sum_{k=1}^{\infty}C^p\|x_{3k-j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 3C^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{3k-j}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• Étape 3 : On note que Q est bien définie sur les suites à support fini. Montrons que Q s'étend à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p}$ en un opérateur borné.

Soit $h=(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p}$ à support fini. On a :

$$\begin{aligned}
\|Qh\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|j-k|\le 1}A_jPh_k\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j-k|\le 1}A_{3k}Ph_j\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j-k|\le 1}A_{3k-1}Ph_j\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j-k|\le 1}A_{3k-2}Ph_j\right\| \\
&\le 3C^2\left[\sum_{l=0}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|A_{3k-l}\left(\sum_{|j-k|\le 1}Ph_j\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \text{ d'après l'étape 2} \\
&\le 9C^2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|A_j\left(\sum_{|j-k|\le 1}Ph_k\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{IT}}{\le} 9C^2\left[\left(\sum_{j=2}^{\infty}\|A_jPh_{j-1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A_jPh_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A_jPh_{j+1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= 9C^2\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A_{j+1}Ph_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|A_jPh_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=2}^{\infty}\|A_{j-1}Ph_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\le 9C^2\cdot 3\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\|A_lPh_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 3^3C^2\left(\sum_{j=1}^{\infty}C^p\|Ph_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le 3^3C^3\|P\|\|h\|
\end{aligned}$$

donc, par densité, Q s'étend à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p}$ en un opérateur borné.

• Étape 4 : Conclusion

L'application $J : \left\{\begin{array}{ccc} X & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p} \\ x & \mapsto & (A_nx)_{n\in\mathbb{N}^*}\end{array}\right.$ est bien définie, linéaire, continue, et vérifie $QJ =$

Id_X car :

$$\forall x \in X, QJ(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|k-j|\leq 1} A_j P(A_k x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|k-j|\leq 1} A_j A_k x = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k x \right) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j x = x.$$

En particulier, J est injective donc $X \simeq J(X)$. De plus, d'après la première étape, il existe un 2-isomorphisme $\psi : \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n \right)_{\ell_p} \to \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{i_n} \right)_{\ell_p}$, donc $X \simeq \psi \circ J(X)$ et il suffit de montrer que $\psi \circ J(X)$ est complémenté dans $\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{i_n} \right)_{\ell_p}$.

Pour cela, montrons que $R = \psi \circ J \circ Q \circ \psi^{-1} : \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{i_n} \right)_{\ell_p} \to \psi \circ J(X)$ est une projection linéaire continue.

On note que R est linéaire continue et on a :

$$R \circ R = \psi \circ J \circ Q \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ J \circ Q \circ \psi^{-1} = \psi \circ J \circ Q \circ J \circ Q \circ \psi^{-1} = \psi \circ J \circ Id_X \circ Q \circ \psi^{-1} = R$$

ce qui assure le résultat.

• On en déduit le cas particulier avec $Y = X$ et comme famille dirigée $(E_i)_{i\in I}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de X. □

La preuve du prochain théorème nécessite le lemme suivant, issu de [21].

Lemme 10. *Soit $p \in]1, +\infty[$, q son exposant conjugué, X un espace de Banach séparable et réflexif avec (m_p).*
(a) Soit E un sous-espace vectoriel de X de dimension finie, $\eta > 0$. Il existe un sous-espace vectoriel H de X^* de dimension finie vérifiant :

$$\forall x \in E, \forall y \in H^{\perp}, (1-\eta)(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p \leq (1+\eta)(\|x\|^p + \|y\|^p);$$

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de X^* de dimension finie, $\eta > 0$. Il existe un sous-espace vectoriel G de X de dimension finie vérifiant :

$$\forall x^* \in F, \forall y^* \in G, (1-\eta)(\|x^*\|^q + \|y^*\|^q) \leq \|x^* + y^*\|^q \leq (1+\eta)(\|x^*\|^q + \|y^*\|^q).$$

Démonstration. Montrons seulement le point (a), l'autre point se montrant de la même manière. Soit E un sous-espace vectoriel de X de dimension finie, $\eta > 0$.
Notons que le résultat souhaité est équivalent au fait qu'il existe un sous-espace vectoriel H de X^* de dimension finie vérifiant :

$$\forall x \in S_E, \forall y \in H^{\perp}, (1-\eta)(1 + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p \leq (1+\eta)(1 + \|y\|^p).$$

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \in [C, +\infty[$, on ait :

$$(1-\eta)(t^p + 1) \leq (t-1)^p \leq (t+1)^p \leq (1+\eta)(t^p + 1)$$

et il existe $\delta > 0$ assez petit pour qu'on ait :

$$\delta + \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1+\eta)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - \delta \geq (1-\eta)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme E est de dimension finie, il existe un δ-réseau fini $(x_1, \cdots, x_k)$ de S_E et, puisque X^* est séparable, il existe une famille $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X^*$ dense dans X^*.
Étape 1 : Montrons que, pour tout $j \in [|1,k|]$, il existe un sous-espace vectoriel H_j de X^* de dimension finie tel que :

$$\forall y \in H_j^\perp \cap CB_X, \left(1-\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y\|^p) \leq \|x_j+y\|^p \leq \left(1+\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y\|^p).$$

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Il existe alors $j \in [|1,k|]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathrm{Vect}\{u_1^*, \cdots, u_n^*\}^\perp \cap CB_X$ vérifiant :

$$\|x_j+y_n\|^p > \left(1+\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y_n\|^p)$$

ou :

$$\|x_j+y_n\|^p < \left(1-\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y_n\|^p)$$

Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle, on peut alors en extraire une sous-suite $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ qui contredit le fait que X a la propriété (m_p).
Donc, pour tout $j \in [|1,k|]$, il existe un sous-espace vectoriel H_j de X^* de dimension finie tel que :

$$\forall y \in H_j^\perp \cap CB_X, \left(1-\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y\|^p) \leq \|x_j+y\|^p \leq \left(1+\frac{\eta}{2}\right)(1+\|y\|^p).$$

Étape 2 : Conclusion
L'espace $H = \bigcup_{j=1}^{k} H_j$ est un sous-espace vectoriel de X^* de dimension finie. Montrons que ce sous-espace convient.
Soit $x \in S_E$, $y \in H^\perp$. Si $\|y\| > C$, on a bien :

$$(1-\eta)(1+\|y\|^p) \leq (\|y\|-1)^p \leq \|x+y\|^p \leq (1+\|y\|)^p \leq (1+\eta)(1+\|y\|^p)$$

donc on peut supposer que $y \in CB_X$. Il existe $j \in [|1,k|]$ tel que $\|x-x_j\| \leq \delta$. On a alors :

$$\|x+y\| \leq \|x-x_j\| + \|x_j+y\| \leq \delta + \left(1+\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(1+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (1+\eta)^{\frac{1}{p}}(1+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et :

$$\|x+y\| \geq \|x_j+y\| - \|x-x_j\| \geq \left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{p}}(1+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}} - \delta \geq (1-\eta)^{\frac{1}{p}}(1+\|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'où le résultat. □

Théorème 23. *Soit $p \in]1,+\infty[$, X un espace de Banach séparable avec $(\tilde{m}_p)$.*
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de X telle qu'il existe une constante $\lambda \geq 1$ vérifiant : pour tous $m,n \in \mathbb{N}^*$, il existe un sous-espace $F_{m,n}$ de X tel que $F_{m,n}$ soit λ-complémenté dans X et $d(F_{m,n}, \ell_p^m(E_n)) \leq \lambda$.
Alors $\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de X.

Démonstration. Notons q l'exposant conjugué de p. Quitte à renormer X, on peut supposer que X a (m_p) et ainsi que X^* a (m_q). Remarquons également que X est réflexif.
Étape 1 : Soit $G \subset X$, $H \subset H^*$ des sous-espaces de dimensions finies, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'il

existe des opérateurs $A : E_n \to X$, $B : X \to E_n$ tels que $BA = Id_{E_n}$, $\|A\| \leq 2\lambda$, $\|B\| \leq 2\lambda$, $A(E_n) \subset H^\perp$ et $B^*(E_n^*) \subset G^\perp$.
Posons $d_h = \dim(H)$, $d_g = \dim(G)$, $\varepsilon = \dfrac{1}{8\lambda \max(\sqrt{d_g}, \sqrt{d_h})}$ (on peut supposer $\max(\sqrt{d_g}, \sqrt{d_h}) > 0$).
Par hypothèse, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $S^{(m)} : \ell_p^m(E_n) \to X$, $T^{(m)} : X \to \ell_p^m(E_n)$ avec $T^{(m)}S^{(m)} = Id_{\ell_p^m(E_n)}$, $\|S^{(m)}\| \leq \lambda$ et $\|T^{(m)}\| \leq \lambda$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $U^{(m)} = (S^{(m)})^* : X^* \to \ell_q^m(E_n^*)$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, notons également $T^{(m)} = (T_1^{(m)}, \cdots, T_m^{(m)})$ et $U^{(m)} = (U_1^{(m)}, \cdots, U_m^{(m)})$.
$*$ Montrons qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, il existe $j \in [|1, m|]$ pour lequel on ait :

$$\|T_j^{(m)}\|_{G \to E_n} + \|U_j^{(m)}\|_{H^* \to E_n^*} \leq \varepsilon.$$

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. On a alors :

$$\forall m_0 \in \mathbb{N}^*, \exists m \geq m_0; \forall j \in [|1, m|], \|T_j^{(m)}\|_{G \to E_n} + \|U_j^{(m)}\|_{H^* \to E_n^*} > \varepsilon.$$

Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{4\lambda} > 0$. Il existe un η réseau fini $\mathcal{R}$ de $S_G \times S_H$, dont on note N le cardinal. Posons également :

$$k = \min\left(\left\lfloor 2\frac{(4\lambda)^p}{\varepsilon^p}\right\rfloor + 1, \left\lfloor 2\frac{(4\lambda)^q}{\varepsilon^q}\right\rfloor + 1\right) \text{ et } m_0 = kN.$$

Il existe alors $m \geq m_0$ tel que, pour tout $j \in [|1, m|]$, on ait $\|T_j^{(m)}\|_{G \to E_n} + \|U_j^{(m)}\|_{H^* \to E_n^*} > \varepsilon$.
Donc, pour tout $j \in [|1, m|]$, il existe $(x_j, y_j) \in S_G \times S_H$ vérifiant $\|T_j^{(m)}x_j\| + \|U_j^{(m)}y_j\| > \varepsilon$.
Pour tout $j \in [|1, m|]$, il existe $(x, y) \in \mathcal{R}$ tel que $\|x - x_j\| + \|y - y_j\| \leq \eta$; on a donc :

$$\|T_j^{(m)}x\| + \|U_j^{(m)}y\| \geq \|T_j^{(m)}x_j\| + \|U_j^{(m)}y_j\| - \lambda\eta - \lambda\eta > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $m \geq kN$, il existe $(x, y) \in \mathcal{R}$ tel que :

$$\text{Card}\left\{j \in [|1, m|]; \|T_j^{(m)}x\| + \|U_j^{(m)}y\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \geq k.$$

Or :

$$\left\{j \in [|1, m|]; \|T_j^{(m)}x\| + \|U_j^{(m)}y\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{j \in [|1, m|]; \|T_j^{(m)}x\| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cup \left\{j \in [|1, m|]; \|U_j^{(m)}y\| > \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

donc, soit :

$$\text{Card}\left\{j \in [|1, m|]; \|T_j^{(m)}x\| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geq \frac{k}{2} \quad (1)$$

soit :

$$\text{Card}\left\{j \in [|1, m|]; \|U_j^{(m)}y\| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geq \frac{k}{2} \quad (2).$$

Si (1) est vraie, on a :

$$\|T^{(m)}x\| = \left(\sum_{j=1}^m \|T_j^{(m)}x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\frac{k}{2}\frac{\varepsilon^p}{4^p}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \lambda$$

ce qui est absurde car $\|T^{(m)}\| \leq \lambda$.
De même, (2) conduit à une absurdité. Donc il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $m \geq m_0$, il existe $j \in [|1, m|]$ pour lequel on ait :

$$\|T_j^{(m)}\|_{G \to E_n} + \|U_j^{(m)}\|_{H^* \to E_n^*} \leq \varepsilon.$$

$*$ En particulier, si $T = T^{(m_0)}$, $S = S^{(m_0)}$ et $U = S^*$, il existe $j \in [|1, m_0|]$ tel que :

$$\|T_j\|_{G \to E_n} + \|U_j\|_{H^* \to E_n^*} \leq \varepsilon.$$

$*$ D'après le théorème de Kadec-Snobar, il existe une projection $P : X \to G$ vérifiant $\|P\| \leq \sqrt{d_g}$ et $P(X) = G$, ainsi qu'une projection $R : X^* \to H$ vérifiant $\|R\| \leq \sqrt{d_h}$ et $R(X^*) = H$. L'application $Q = R^* : X \to X$ est alors une projection vérifiant $\|Q\| \leq \sqrt{d_h}$ et $Q^*(X^*) = R(X^*) = H$ car X est réflexif.
On en déduit que :

$$\|T_jP\| \leq \sqrt{d_g}\varepsilon \leq \frac{1}{8\lambda} \text{ et } \|QS_j\| = \|U_jQ^*\| \leq \sqrt{d_h}\varepsilon \leq \frac{1}{8\lambda}$$

où $S_j : \begin{cases} E_n & \to & X \\ x & \mapsto & S(0, \cdots, 0, \underset{j^e \text{ position}}{\underset{\uparrow}{x}}, 0, \cdots, 0) \end{cases}.$

$*$ Considérons désormais l'opérateur $T_j(Id_X - P)(Id_X - Q)S_j : E_n \to E_n$. Comme $T_jS_j = Id_{E_n}$, on a :

$$\|Id_{E_n} - T_j(Id_X - P)(Id_X - Q)S_j\| = \|T_jQS_j + T_jPS_j - T_jPQS_j\| \leq \lambda \times \frac{1}{8\lambda} + \lambda \times \frac{1}{8\lambda} + \frac{1}{8\lambda} \times \frac{1}{8\lambda} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$$

donc il existe $D : E_n \to E_n$ vérifiant $T_j(Id_X - P)(Id_X - Q)S_jD = Id_{E_n}$.
Notons que :

$$\|D\| = \|Id_{E_n}D - T_j(Id_X - P)(Id_X - Q)S_jD + Id_{E_n}\| \leq \frac{\|D\|}{3} + 1$$

donc $\|D\| \leq \frac{3}{2}$.
$*$ Posons alors $B = T_j(Id_X - P) : X \to E_n$, $A = (Id_X - Q)S_jD : E_n \to X$. On a :
(i) $BA = Id_{E_n}$, $\|B\| \leq \lambda + \frac{1}{8\lambda} \leq 2\lambda$, $\|A\| \leq \frac{3}{2}\left(\lambda + \frac{1}{8\lambda}\right) \leq \frac{3\lambda}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\right) \leq 2\lambda$;
(ii) $A(E_n) \subset H^\perp$ car :

$$\forall x^* \in H, \forall x \in E_n, x^*(Ax) = A^*(x^*)(x) = D^*S_j^*\underbrace{(Id_{X^*} - Q^*)(x^*)}_{=0}(x) = 0;$$

(iii) $B^*(E_n^*) \subset G^\perp$ car :

$$\forall x^* \in E_n^*, \forall g \in G, B^*(x^*)(g) = x^*(Bg) = 0;$$

ce qui achève l'étape 1.
Soit $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 + \eta_k) \leq \min(2^p, 2^q)$.
Étape 2 : Construisons par récurrence deux suites d'opérateurs $(A_n : E_n \to X)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(B_n : X \to E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in \prod_{k=1}^n E_k, \left\|\sum_{k=1}^n A_ku_k\right\|^p \leq (2\lambda)^p \left(\sum_{k=1}^n \|u_k\|^p\right) \prod_{k=1}^{n-1}(1 + \eta_k);$$

et :

$$\forall (u_1^*, \cdots, u_n^*) \in \prod_{k=1}^n E_k^*, \left\|\sum_{k=1}^n B_k^*u_k^*\right\|^q \leq (2\lambda)^q \left(\sum_{k=1}^n \|u_k^*\|^q\right) \prod_{k=1}^{n-1}(1 + \eta_k);$$

ainsi que $B_nA_n = Id_{E_n}$.
L'étape 1 nous assure qu'il existe des opérateurs $A_1 : E_1 \to X$, $B_1 : X \to E_1$ tels que $B_1A_1 = Id_{E_n}$, $\|A_1\| \leq 2\lambda$, $\|B_1\| \leq 2\lambda$, $A_1(E_1) \subset H^\perp$ et $B_1^*(E_1^*) \subset G^\perp$, où G et H sont des sous-espaces de dimension 1 de X et X^* respectivement.
Supposons ainsi construits $A_1, \cdots, A_n$, $B_1, \cdots, B_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notons E le sous-espace de dimension finie engendré par les images de $A_1, \cdots, A_n$ et F et sous-espace de dimension finie engendré par les images de $B_1^*, \cdots, B_n^*$.
Notons alors $H' \subset X^*$, $G' \subset X$ les sous-espaces donnés par le lemme 10, appliqué avec η_n.
Notons également H le sous-espace vectoriel engendré par H' et les images de $B_1^*, \cdots, B_n^*$, G le sous-espace vectoriel engendré par G' et les images de $A_1, \cdots, A_n$.
D'après la première étape, il existe des opérateurs $A_{n+1} : E_{n+1} \to X$, $B_{n+1} : X \to E_{n+1}$ tels que $B_{n+1}A_{n+1} = Id_{E_{n+1}}$, $\|A_{n+1}\| \leq 2\lambda$, $\|B_{n+1}\| \leq 2\lambda$, $A_{n+1}(E_{n+1}) \subset H^\perp$ et $B_{n+1}^*(E_{n+1}^*) \subset G^\perp$.
On a, pour tout $(u_1, \cdots, u_{n+1}) \in \prod_{k=1}^{n+1} E_k$:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n+1} A_k u_k\right\|^p &= \left\|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_k u_k}_{\in E} + \underbrace{A_{n+1}u_{n+1}}_{\in H'^\perp}\right\|^p \\
&\leq (1+\eta_n)\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k u_k\right\|^p + (2\lambda)^p\|u_{n+1}\|^p\right) \\
&\leq (2\lambda)^p\left(\sum_{k=1}^{n+1}\|u_k\|^p\right)\prod_{k=1}^{n}(1+\eta_k)
\end{aligned}$$

et, de même, pour tout $(u_1^*, \cdots, u_{n+1}^*) \in \prod_{k=1}^{n+1} E_k^*$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1} B_k^* u_k^*\right\|^q \leq (2\lambda)^q\left(\sum_{k=1}^{n+1}\|u_k^*\|^q\right)\prod_{k=1}^{n}(1+\eta_k)$$

ce qui achève la construction par récurrence.
Notons que l'on a :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}, \quad \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n\right\| \leq 4\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et :

$$\forall (u_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n^*\right)_{\ell_q}, \quad \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* u_n^*\right\| \leq 4\lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n^*\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Étape 3 : Conclusion
Posons alors :

$$A : \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} & \to \quad X \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n \end{cases} \quad \text{et } B : \begin{cases} X & \to \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} \\ x & \mapsto \quad (B_n x)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases}.$$

Ces applications sont bien définies d'après ce qui précède, et $\|A\| \leq 4\lambda$, $\|B\| \leq 4\lambda$. Montrons pour terminer que $BA = Id_{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}}$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de vérifier que, pour toutes suites $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n^*\right)_{\ell_q}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\langle B_n^* y_n^*, A_k u_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n^*, BA((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*})\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n^*, u_n\rangle.$$

Or, pour toutes suites $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n^*\right)_{\ell_q}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\langle B_n^* y_n^*, A_k u_k\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\langle A_k^* B_n^* y_n^*, u_k\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\langle B_k^* y_k^*, A_n u_n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\langle B_n^* y_n^*, A_n u_n\rangle \\ &= 0 + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n^*, u_n\rangle\end{aligned}$$

grâce à la façon dont on a construit les opérateurs par récurrence.

Pour conclure, il suffit de remarquer que A est injective, que $P = AB$ est une projection linéaire continue de X sur $A\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}\right)$, et que $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} \simeq A\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}\right)$. $\square$

Le prochain théorème requiert l'introduction des L_p-normes aléatoires, $p \in [1, +\infty[$. Afin d'éviter de définir les espaces L_p abstraits, nous supposerons dans la définition de ces applications qu'elles sont à valeur dans ℓ_p ou L_p, ce qui nous suffira pour la suite.

Définition 26. *Soit $p \in [1, +\infty[$.*

- *On dit qu'un espace de Banach Y admet une L_p-norme aléatoire s'il existe une application $V : Y \to Z$, avec $Z \in \{L_p, \ell_p\}$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in Y$, on ait $Vy \geq 0$, $V(\alpha y) = |\alpha| Vy$, $\|Vy\|_p = \|y\|$ et :*

$$\forall (y_1, y_2) \in Y^2, V(y_1 + y_2) \leq Vy_1 + Vy_2.$$

- *L'application V, qui est continue, est alors appelée L_p-norme aléatoire.*
- *Pour $r > p$, on dit que V est de type r s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall (y_1, y_2) \in Y^2, \left(\frac{V(y_1+y_2)^p + V(y_1-y_2)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq ((Vy_1)^r + C^r (Vy_2)^r)^{\frac{1}{r}};$$

la comparaison se faisant terme à terme dans le cas où $Z = \ell_p$.

Dans la suite, nous aurons besoin de l'inégalité énoncée dans le lemme ci-dessous. Nous en donnons une formulation dans le cas général mais ne la prouverons que dans un cas particulier (dans lequel nous serons par la suite).

Lemme 11. *Soit $1 < p < r \leq 2$, X un espace de Banach séparable, V une L_p-norme aléatoire sur X de type r, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite iid de Rademacher.*
Il existe une constante $C \geq 1$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \cdots, x_k) \in X^k$, on ait :

$$\mathbb{E}\left(\left\|V\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\sum_{j=1}^{k}(Vx_j)^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p.$$

Démonstration. Montrons cette inégalité dans le cas où $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$, avec $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces uniformément r-uniformément lisses, de dimension finie ; et :

$$V : \left\{ \begin{array}{lll} X & \to & \ell_p \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (\|x_n\|_{E_n})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right. .$$

D'après l'inégalité de Kahane-Khintchine (énoncée dans l'annexe), il existe une constante $A \geq 1$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \cdots, x_k) \in E_n^k, \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\right\|_{E_n}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq A\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\right\|_{E_n}\right).$$

De plus, d'après le Théorème 1.e.16 de [23], comme les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément r-uniformément lisses, il sont uniformément de type r donc il existe une constante $B \geq 1$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \cdots, x_k) \in E_n^k, \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\right\|_{E_n}^{r}\right) \leq B^r \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_{E_n}^r.$$

Montrons alors que $C = AB$ convient. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(x^1, \cdots, x^k) \in X^k$. Pour tout $j \in [|1, k|]$, notons $x^j = (x_n^j)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|V\left(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x^j\right)\right\|_{p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} &= \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_n^j\right\|_{E_n}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{FT}}{=} \left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_n^j\right\|_{E_n}^{p}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} A^p \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\right\|_{E_n}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq A\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_n^j\right\|_{E_n}^{r}\right)^{\frac{p}{r}}\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{car } 1 \leq r \\
&\leq A\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(B^r \sum_{j=1}^{k} \|x_n^j\|_{E_n}^r\right)^{\frac{p}{r}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= C\left\|\left[\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_n^j\|_{E_n}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]_{n\in\mathbb{N}^*}\right\|_{p} \\
&= C\left\|\left(\sum_{j=1}^{k} (Vx_j)^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{p}
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

Théorème 24. *Soit $1 < p < r \leq 2$, X un espace de Banach séparable possédant une L_p-norme aléatoire de type r.*
Si X a la propriété p-co-Banach-Saks, alors X a la propriété $(\tilde{m}_p)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une L_p-norme aléatoire $V : X \to L_p$ de type r. Notons C_1 la constante associée, C_2 la constante donnée par le lemme précédent, et $C = \max(C_1, C_2)$. Notons également $\mathscr{B}$ l'ensemble des boréliens de $[0,1]$ et, pour tout $E \in \mathscr{B}$, $|E|$ désignera la mesure de Lebesgue de E.
Pour tout $\theta \in]0,1[$, pour toute $f \in L_p$, on pose $\|f\|_{p,\theta} = \sup\limits_{\substack{E\in\mathscr{B}\\|E|\leq\theta}} \|\mathbb{1}_E f\|_p$.
Commençons par noter que X est super-réflexif. Pour cela, il suffit de remarquer que X est p-uniformément lisse puisque, pour tout $(x,y) \in X^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} &= \frac{\|V(x+y)\|_p^p + \|V(x-y)\|_p^p}{2} = \int_0^1 \frac{V(x+y)^p + V(x-y)^p}{2} d\lambda\\ &\leq \int_0^1 ((Vx)^r + C^r(Vy)^r)^{\frac{p}{r}}\, d\lambda\\ &\leq \int_0^1 ((Vx)^p + C^p(Vy)^p) d\lambda \text{ car } p \leq r\\ &= \|Vx\|_p^p + C^p\|Vy\|_p^p = \|x\|^p + C^p\|y\|^p.\end{aligned}$$

D'après le théorème 18, il suffit de montrer que X est p-AUC et p-AUS.
• Montrons que X est p-AUS.
Montrons que, pour tout $t \in [0,1]$, $\overline{\rho}_X(t) \leq 2C^p t^p$. Soit $t \in [0,1]$, $x \in S_X$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces fermés de X de codimension finie. Il s'agit de montrer que :

$$\inf_{E\in\mathcal{E}} \sup_{y\in S_E} \|x+ty\| - 1 \leq 2C^p t^p.$$

Or, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x^* \in S_{X^*}$ vérifiant $x^*(x) = 1$ et, si on pose $E = \ker(x^*) \in \mathcal{E}$, pour tout $y \in S_E$, on a :

$$\begin{aligned}\|x+ty\| - 1 &= \|x+ty\| + \|x-ty\| - 2 + 1 - \|x-ty\|\\ &\leq \|x+ty\| + \|x-ty\| - 2 \text{ car } 1 - \|x-ty\| \leq 1 - x^*(x-ty) = 0\\ &\leq \|x+ty\|^p + \|x-ty\|^p - 2 \text{ car } \|x \pm ty\| \geq 1 \text{ et } p \geq 1\\ &\leq 2(\|x\|^p + C^p\|ty\|^p) - 2 \text{ d'après ce qui précède}\\ &= 2C^p t^p\end{aligned}$$

donc X est bien p-AUS.
• Montrons désormais que X est p-AUC si X a la propriété p-co-Banach-Saks.
Supposons que X ait la propriété p-co-Banach-Saks. Il existe alors une constante $c > 0$ telle que toute suite normalisée faiblement nulle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ admette une sous-suite $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k, \left\|\sum_{j=1}^k x_{n_j}\right\| \geq ck^{\frac{1}{p}}.$$

Pour montrer que X est p-AUC, il suffit de montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\overline{\delta}_X(t) \geq \left(1 + 2^{-p}C^{-p}c^p t^p\right)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Pour cela, montrons que, pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in S_X$, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_X$ faiblement nulle, on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x + x_n\|^p \geq 1 + 2^{-p}C^{-p}c^p t^p.$$

Soit $t \in [0,1]$, $x \in S_X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset tS_X$ une suite faiblement nulle.
Supposons que ce ne soit pas le cas. Quitte à extraire, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x + x_n\|^p = 1 + b^p$, avec $b < \dfrac{ct}{2C}$. Il existe ainsi $\lambda \in]0,1[$ tel que $b < \dfrac{\lambda c}{2C}$.
$*$ Comme X a la propriété p-co-Banach-Saks, il existe une sous-suite $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \geq \lambda c k^{\frac{1}{p}} t$$

car $\lambda t < 1$.
Fixons désormais une suite iid de Rademacher $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le lemme 9 assure que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=N}^{N+k} \varepsilon_j x_{n_j}\right\|\right) \geq \frac{\lambda c}{2} k^{\frac{1}{p}} t.$$

$*$ Soit $\theta \in]0,1[$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $E_n \in \mathscr{B}$ tel que $|E_n| = \theta$ et $\|Vx_n\|_{p,\theta} = \|\mathbb{1}_{E_n} V x_n\|_p$.
Il suffit de montrer que, pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ intégrable, il existe $E \in \mathscr{B}$ tel que $|E| = \theta$ et $\|f\|_{1,\theta} = \|\mathbb{1}_E f\|_1$. Notons f^* le réarrangement décroissant de f et $E = \{f \geq f^*(\theta)\}$. On a $|E| = |\{f^* \geq f^*(\theta)\}| = |[0,\theta]| = \theta$ et, par construction, $\|f\|_{1,\theta} = \|\mathbb{1}_E f\|_1$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $E_n \in \mathscr{B}$ tel que $|E_n| = \theta$ et $\|Vx_n\|_{p,\theta} = \|\mathbb{1}_{E_n} V x_n\|_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\tilde{E}_n = [0,1] \setminus E_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\|\mathbb{1}_{\tilde{E}_n} V x_n\|_\infty \leq \theta^{-\frac{1}{p}}$.
Pour cela, il suffit de remarquer que, comme $\|Vx_n\|_p = \|x_n\| \leq 1$, on ne peut avoir $Vx_n > \theta^{-\frac{1}{p}}$ presque-partout sur E_n donc $Vx_n \leq \theta^{-\frac{1}{p}}$ sur un ensemble de mesure non nulle de E_n et, par conséquent, si on avait $\|\mathbb{1}_{\tilde{E}_n} V x_n\|_\infty > \theta^{-\frac{1}{p}}$, cela contredirait l'égalité $\|Vx_n\|_{p,\theta} = \|\mathbb{1}_{E_n} V x_n\|_p$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|(Vx_n)\mathbb{1}_{\tilde{E}_n}\|_r = \left(\int_0^1 (Vx_n)^r \mathbb{1}_{\tilde{E}_n} d\lambda\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_0^1 \theta^{-\frac{r}{p}} \mathbb{1}_{\tilde{E}_n} d\lambda\right)^{\frac{1}{r}} \leq \theta^{-\frac{1}{p}}(1-\theta)^{\frac{1}{r}}.$$

$*$ D'après le lemme précédent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=N}^{N+k} \varepsilon_j x_{n_j}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}\left(\left\|V\left(\sum_{j=N}^{N+k} \varepsilon_j x_{n_j}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k} (Vx_{n_j})^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a d'abord :

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k} (Vx_{n_j})^r \mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p &\overset{p\leq r}{\leq} \left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k} (Vx_{n_j})^r \mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_r = \left(\int_0^1 \sum_{j=N}^{N+k} (Vx_{n_j})^r \mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}} d\lambda\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\sum_{j=N}^{N+k} \|(Vx_{n_j})\mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}}\|_r^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{j=N}^{N+k} \theta^{-\frac{r}{p}}(1-\theta)\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \theta^{-\frac{1}{p}}(1-\theta)^{\frac{1}{r}} k^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

et, d'un autre côté, on a :

$$\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^r\mathbb{1}_{E_{n_j}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p \overset{p\leq r}{\leq} \left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^p\mathbb{1}_{E_{n_j}}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_p = \left(\sum_{j=N}^{N+k}\|(Vx_{n_j})\mathbb{1}_{E_{n_j}}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=N}^{N+k}\|Vx_{n_j}\|_{p,\theta}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda ck^{\frac{1}{p}}t}{2} &\leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=N}^{N+k}\varepsilon_j x_{n_j}\right\|\right) \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=N}^{N+k}\varepsilon_j x_{n_j}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p \\ &= C\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^r(\mathbb{1}_{E_{n_j}}+\mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}})\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p \overset{\frac{1}{r}\leq 1}{\leq} C\left\|\left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^r\mathbb{1}_{E_{n_j}}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j=N}^{N+k}(Vx_{n_j})^r\mathbb{1}_{\tilde{E}_{n_j}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p \\ &\overset{\text{IT}}{\leq} C\left(\sum_{j=N}^{N+k}\|Vx_{n_j}\|_{p,\theta}^p\right)^{\frac{1}{p}} + C\theta^{-\frac{1}{p}}(1-\theta)^{\frac{1}{r}}k^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$\frac{\lambda ck^{\frac{1}{p}}t}{2} \leq Ck^{\frac{1}{p}}\liminf_{n\to\infty}\|Vx_n\|_{p,\theta} + 4C\theta^{-\frac{1}{p}}(1-\theta)^{\frac{1}{r}}k^{\frac{1}{r}}$$

en passant à la limite inférieure quand $N \to +\infty$ dans ce qui précède.
En faisant désormais tendre $k \to +\infty$, comme $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} = 0$, on trouve :

$$(*) \quad \frac{\lambda ct}{2C} \leq \liminf_{n\to\infty}\|Vx_n\|_{p,\theta}.$$

$*$ Choisissons $b_1 > 0$ tel que $b < b_1 < \dfrac{\lambda ct}{2C}$.
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $G_n \in \mathscr{B}$ de mesure minimale tel que $\|\mathbb{1}_{G_n}Vx_n\|_p = b_1$.
Il suffit de montrer que, pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ intégrable, $0 < b < \|f\|_1$, il existe G de mesure minimale tel que $\|\mathbb{1}_G f\|_1 = b$.
Pour cela, posons $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^1 f(s)\mathbb{1}_{\{f>t\}}(s)ds$, qui est une fonction décroissante.
S'il existe $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(t) = b$, on pose $G = \{f > t\}$. Sinon il existe $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(t) > b$ et, pour tout $s > t$, $g(s) < b$. Dans ce cas, il existe $F \subset \{f = t\}$ tel que $t|F| = b - g(t)$ et on conclut en posant $G = \{f > t\} \cup F$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $G_n \in \mathscr{B}$ de mesure minimale tel que $\|\mathbb{1}_{G_n}Vx_n\|_p = b_1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $t_n = |G_n|$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.
Supposons pour cela que ce ne soit pas le cas. Quitte à extraire, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \theta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n^* le réarrangement décroissant de $|Vx_n|^p$; on note que $\|f_n^*\mathbb{1}_{[0,t_n]}\|_1 = \|\mathbb{1}_{G_n}Vx_n\|_p = b_1$. Par $(*)$, on a :

$$\liminf_{n\to\infty}\|f_n^*\mathbb{1}_{[0,\theta]}\|_1 = \liminf_{n\to\infty}\|Vy_n\|_{p,\theta} \geq \frac{\lambda ct}{2C}.$$

Posons $\varepsilon = \dfrac{\lambda ct}{2C} - b_1 > 0$. Pour n assez grand, on a nécessairement $t_n < \theta$ et :

$$\|f_n^*\mathbb{1}_{]t_n,\theta]}\|_1 \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc, comme f_n^* est décroissante, cela implique que $f_n^*(t_n)(\theta - t_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ puis que :

$$1 \geq \|Vx_n\|_p = \|f_n^*\|_1 \geq \|f_n^* \mathbb{1}_{[0,t_n]}\|_1 \geq t_n \frac{1}{\theta - t_n} \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est absurde car $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \theta$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n \frac{1}{\theta - t_n} \frac{\varepsilon}{2} = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |G_n| = 0$.
Considérons la semi-norme $p : \left\{ \begin{array}{lcl} X & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & \int_0^1 (Vx(s))^{p-1} Vz(s) ds \end{array} \right.$.
D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $x^* \in X^*$ vérifiant $x^*(x) = \|Vx\|_p^p = 1$ et :

$$\forall z \in X, x^*(z) \leq p(z) = \int_0^1 (Vx(s))^{p-1} Vz(s) ds.$$

En particulier, si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{G}_n = [0,1] \setminus G_n$, on a :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} x^*(x+x_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{G_n} (Vx(s))^{p-1} V(x+x_n)(s) ds + \int_{\tilde{G}_n} (Vx(s))^{p-1} V(x+x_n)(s) ds \right)$$

car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement nulle.
Or, d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{G_n} (Vx(s))^{p-1} V(x+x_n)(s) ds \leq \left(\int_{G_n} (Vx(s))^p ds \right)^{1-\frac{1}{p}} \|V(x+x_n)\|_p = \left(\int_{G_n} (Vx(s))^p ds \right)^{1-\frac{1}{p}} \|x+x_n\|$$

donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |G_n| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{G_n} (Vx(s))^{p-1} V(x+x_n)(s) ds = 0$.
En en déduit, de nouveau grâce à l'inégalité de Hölder, que :

$$1 \leq \liminf_{n\to\infty} (\|Vx\|_p^p)^{1-\frac{1}{p}} \|\mathbb{1}_{\tilde{G}_n} V(x+x_n)\|_p = \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{\tilde{G}_n} V(x+x_n)\|_p.$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathbb{1}_{G_n} Vx\|_p = 0$, donc :

$$b_1 = \lim_{n\to+\infty} \|\mathbb{1}_{G_n} Vx_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} (\|\mathbb{1}_{G_n} Vx\|_p + \|\mathbb{1}_{G_n} V(x+x_n)\|_p) = \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{G_n} V(x+x_n)\|_p$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + b_1^p &\leq \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{\tilde{G}_n} V(x+x_n)\|_p^p + \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{G_n} V(x+x_n)\|_p \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} (\|\mathbb{1}_{\tilde{G}_n} V(x+x_n)\|_p^p + \|\mathbb{1}_{G_n} V(x+x_n)\|_p) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|V(x+x_n)\|_p^p = \liminf_{n\to\infty} \|x+x_n\|^p \\ &= 1 + b^p < 1 + b_1^p \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Finalement, X est p-AUC, ce qui conclut. □

Prouvons désormais un résultat sur les modèles étalés d'un espace de Banach se plongeant grossièrement dans un espace réflexif. Commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 12. *Soit X un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ une suite normalisée, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite iid de Rademacher sur l'espace probabilisé $\Delta = \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$.*

Posons $T : \left\{ \begin{array}{lcl} c_{00} & \to & L_1(\Delta; X) \\ \xi & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j \varepsilon_j \otimes x_j \end{array} \right.$ *. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons :*

$$\sigma_k = \sup\left\{ \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_{n_j} \right\| \right), (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k \right\}$$

et :

$$F_k : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sigma_k \frac{t}{k} \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{\sigma_k}\right]}(t) + \left(t + \frac{1}{k} - \frac{1}{\sigma_k} \right) \mathbb{1}_{\left]\frac{1}{\sigma_k}, +\infty\right[}(t).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\xi \in c_{00}$, on a :

$$\|T\xi\| \leq 2\|\xi\|_{\ell_{F_k}}.$$

Démonstration. Commençons par noter que la somme apparaissant dans l'application T est finie donc l'application est bien définie, et est également linéaire.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\xi \in c_{00}$ vérifiant $\|\xi\|_{\ell_{F_k}} \leq 1$. Montrons que $\|T\xi\| \leq 2$.
Notons $(\xi_j^*)_{j\in\mathbb{N}^*}$ le réarrangement décroissant de $(|\xi_j|)_{j\in\mathbb{N}^*}$.
Comme F_k est croissante et $\|\xi\|_{\ell_{F_k}} \leq 1$, on a $F_k(\xi_k^*) \leq \frac{1}{k}$ donc $\xi_k^* \leq \frac{1}{\sigma_k}$ (car, pour tout $t > \frac{1}{\sigma_k}$, $F_k(t) > \frac{1}{k}$).

• Montrons que $\|T\xi\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\xi_j^* - \xi_{j+1}^*)\sigma_j$.
Pour cela, notons $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite associée au réarrangement. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_j \in \{-1,1\}$ tel que $\xi_j^* = \theta_j \xi_{n_j}$. Il suffit alors de remarquer que, pour presque-tout $\omega \in \Delta$:

$$\begin{aligned}
T\xi(\omega) &= \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varepsilon_j(\omega) x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \theta_j \varepsilon_{n_j}(\omega) x_{n_j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \left(\sum_{i=1}^{j} \theta_i \varepsilon_{n_i}(\omega) x_{n_i} - \sum_{i=1}^{j-1} \theta_i \varepsilon_{n_i}(\omega) x_{n_i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j^* - \xi_{j+1}^*) \left(\sum_{i=1}^{j} \theta_i \varepsilon_{n_i}(\omega) x_{n_i} \right)
\end{aligned}$$

d'où $\|T\xi\| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} (\xi_j^* - \xi_{j+1}^*)\sigma_j$ car, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, les vecteurs aléatoires $(\theta_i \varepsilon_{n_i})_{i=1}^{j}$ et $(\varepsilon_i)_{i=1}^{j}$ suivent la même loi.

• Notons également que la suite $\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
En effet, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(n_1, \cdots, n_{l+1}) \in [\mathbb{N}^*]^{l+1}$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left\| \sum_{j=1}^{l+1} \varepsilon_j x_{n_j} \right\| \right) = \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^{l+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{l+1} \frac{\varepsilon_j x_{n_j}}{l} \right\| \right) \leq \sum_{i=1}^{l+1} \frac{\sigma_l}{l} = (l+1)\frac{\sigma_l}{l}$$

d'où $\frac{\sigma_{l+1}}{l+1} \leq \frac{\sigma_l}{l}$.
• On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\|T\xi\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_j^* - \xi_{j+1}^*)\sigma_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{k}(\xi_j^* - \xi_{j+1}^*)\sigma_j + \frac{\sigma_k}{k}\sum_{j=k+1}^{\infty} j(\xi_j^* - \xi_{j+1}^*) \text{ car } \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \\
&= \sum_{j=1}^{k}\xi_j^*\sigma_j - \sum_{j=2}^{k+1}\xi_j^*\sigma_{j-1} + \frac{\sigma_k}{k}\sum_{j=k+1}^{\infty} j\xi_j^* - \frac{\sigma_k}{k}\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-1)\xi_j^* \\
&= \sum_{j=1}^{k}\xi_j^*(\sigma_j - \sigma_{j-1}) - \xi_{k+1}^*\sigma_k + \frac{\sigma_k}{k}\sum_{j=k+2}^{\infty}\xi_j^* + \frac{\sigma_k}{k}(k+1)\xi_{k+1}^* \text{ où } \sigma_0 = 0 \\
&= \sum_{j=1}^{k}\xi_j^*(\sigma_j - \sigma_{j-1}) + \frac{\sigma_k}{k}\sum_{j=k+1}^{\infty}\xi_j^*.
\end{aligned}$$

• Or, pour tout $j \geq k$, on a $\xi_j^* \leq \xi_k^* \leq \frac{1}{\sigma_k}$ donc $F_k(\xi_j^*) = \sigma_k \dfrac{\xi_j^*}{k}$ et, pour tout $j \leq k$:
$*$ si $\xi_j^* \leq \frac{1}{\sigma_k}$, alors $\xi_j^* \leq \frac{1}{\sigma_k} + F_k(\xi_j^*)$;
$*$ sinon, $F_k(\xi_j^*) = \xi_j^* + \frac{1}{k} - \frac{1}{\sigma_k}$ donc $\xi_j^* \leq \xi_j^* + \frac{1}{k} = F_j(\xi_j^*) + \frac{1}{\sigma_k}$;
d'où $\xi_j^* \leq \frac{1}{\sigma_k} + F_k(\xi_j^*)$.
• Montrons de plus que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On a bien $\sigma_1 = 1 \leq 0 = \sigma_0$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(n_1, \cdots, n_{j+1}) \in [\mathbb{N}^*]^{j+1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{j+1}\varepsilon_i x_{n_i}\right\|\right) &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\left\|\sum_{i=1}^{j}\varepsilon_i x_{n_i} + x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{j}\varepsilon_i x_{n_i} - x_{n_{j+1}}\right\|\right)\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{j}\varepsilon_i x_{n_i}\right\|\right)
\end{aligned}$$

d'où $\sigma_j \leq \sigma_{j+1}$.
• Pour finir, on a donc :

$$\begin{aligned}
\|T\xi\| &\leq \sum_{j=1}^{k}(F_k(\xi_j^*) + \sigma_k^{-1})(\sigma_j - \sigma_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} F_k(\xi_j^*) \text{ car } (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} F_k(\xi_j^*) + \frac{\sigma_k - \sigma_0}{\sigma_k} \text{ car } 0 \leq \sigma_j - \sigma_{j-1} \leq 1,\ j \in \mathbb{N}^* \\
&\leq 2 \text{ car } \|\xi\|_{\ell_F} \leq 1
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Grâce ce lemme, on peut montrer le théorème ci-dessous.

Théorème 25. *Soit X, Y deux espaces de Banach tels que X se plonge grossièrement Lipschitz dans Y.*

Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute suite normalisée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ avec $\mathrm{Sep}(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \theta > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $(n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}^*]^k$ vérifiant :

$$c\theta \|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\hat{\delta}_Y}} \leq \mathbb{E}(\|\varepsilon_1 x_{n_1} + \cdots + \varepsilon_k x_{n_k}\|)$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite iid de Rademacher sur l'espace probabilisé $\Delta = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.

Démonstration. Comme X se plonge grossièrement Lipschitz dans Y, on peut supposer qu'il existe $f : X \to Y$ continue vérifiant $f(0) = 0$, et $K > 0$ tels que :

$$\forall (x, z) \in X^2, \|x - z\| - 1 \leq \|f(x) - f(z)\| \leq K\|x - z\| + 1.$$

• On reprend les notations de la preuve précédente..
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_k est une fonction d'Orlicz vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{F_k(t)}{t} = 1$.
On peut donc définir la norme absolue N_k sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $N(0, 1) = 1$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N_k(1, t) = 1 + F_k(t)$.
De même, comme la fonction $F : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^t \hat{\delta}_Y(s)\frac{ds}{s}$ est une fonction d'Orlicz vérifiant $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} = 1$, on peut définir une norme absolue sur $\mathbb{R}^2$ par $N_Y(0, 1) = 1$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, N_Y(t) = 1 + F(t) = 1 + \int_0^t \hat{\delta}_Y(s)\frac{ds}{s}.$$

Comme $s \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\hat{\delta}_Y(s)}{s}$ est croissante, notons que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$N(1, t) \leq 1 + \frac{\hat{\delta}_Y(t)}{t} \times t = 1 + \hat{\delta}_Y(t).$$

• D'après la proposition 23, pour tout $(y, z) \in Y^2$ tel que $\|y - z\| = 1$, pour toute suite bornée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$, on a :

$$\liminf_{n\to\infty}(\|y - y_n\| + \|z - y_n\|) \geq 1 + \hat{\delta}_Y(\mathrm{Sep}(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) \geq N_Y(1, \mathrm{Sep}(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}) \quad (*)$$

donc, pour tout $(y, z) \in Y^2$, pour toute suite bornée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$, on a :

$$\liminf_{n\to\infty}(\|y - y_n\| + \|z - y_n\|) \geq N_Y(\|y - z\|, \mathrm{Sep}(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}).$$

Fixons désormais $k \in \mathbb{N}^*$.
• Posons $T : \begin{cases} (c_{00}, \|.\|_{\Lambda_{N_k}}) & \to & L_1(\Delta; X) \\ \xi & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j \varepsilon_j \otimes x_j \end{cases}$. Montrons que T est continue et vérifie :

$$\forall \xi \in c_{00}, \|T\xi\| \leq 4\|\xi\|_{\Lambda_{N_k}}.$$

D'après le lemme 2, pour tout $\xi \in c_{00}$, $\|\xi\|_{\ell_{F_k}} \leq 2\|\xi\|_{\Lambda_{N_k}}$ et, d'après le lemme 12, pour tout $\xi \in c_{00}$, $\|T\xi\| \leq 2\|\xi\|_{\ell_{F_k}}$ donc T est continue et $\|T\| \leq 4$.
• Montrons que $g : \begin{cases} c_{00} & \to & L_1(\Delta; Y) \\ \xi & \mapsto & f \circ T(\xi) \end{cases}$ est bien définie.
Soit $\xi \in c_{00}$. Comme f est continue et que la somme définissant $T\xi$ est finie, $f \circ T(\xi)$ est mesurable. De plus, pour presque-tout $\omega \in \Delta$, on a :

$$\|g(\xi)(\omega)\| = \left\| f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varepsilon_j(\omega) x_j\right) - f(0) \right\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varepsilon_j(\omega) x_j \right\| + 1$$

donc g est bien définie.
Notons de plus que, comme T est linéaire, on a :

$$\forall \xi, \eta \in c_{00}, \|g(\eta) - g(\xi)\| = \|f(T\xi) - f(T\eta)\| \leq K\|T(\xi - \eta)\| + 1 \leq 4K\|\xi - \eta\|_{\Lambda_{N_k}} + 1.$$

• Montrons que $\mathrm{Lip}_\infty(g) \geq 1$.
Pour cela, il suffit de remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}\|g(te_1)\| = \mathbb{E}(\|f(t\varepsilon_1 x_1)\|) &= \frac{1}{2}(\|f(tx_1)\| + \|f(-tx_1)\|)\\ &\geq \frac{1}{2}\|f(tx_1) + f(-tx_1)\| \geq \frac{1}{2}(\|2tx_1\| - 1) = t - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En effet, si on avait $A := \mathrm{Lip}_\infty(g) < 1$, alors il existerait $s \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall \xi, \eta \in c_{00}, \|\xi - \eta\|_{\Lambda_{N_k}} \geq s \implies \|g(\xi) - g(\eta)\| \leq A\|\xi - \eta\|_{\Lambda_{N_k}}$$

et alors, pour tout $t \geq s$, on aurait $t - 1 \leq At$ *i.e* $(1 - A)t \leq 1$, ce qui est impossible si $A < 1$.
Donc $\mathrm{Lip}_\infty(g) \geq 1$.
• Montrons que $N_Y\left(1, \dfrac{\theta}{8\sigma_k K}\right) \leq 1 + \dfrac{2}{k}$.
Comme la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto N_Y(1, t)$ est croissante, il suffit de montrer que, pour tout $\tau_0 > 0$, il existe $\tau > \tau_0$ vérifiant :

$$N_Y\left(1, \frac{\theta - \sigma_k\tau^{-1}}{\sigma_k(8K + \tau^{-1})}\right) \leq \frac{2}{k} + 1.$$

Pour ce faire, appliquons la proposition 20. Soit $\tau_0 > 0$. D'après cette proposition, il existe $\tau > \tau_0$ et $(\eta, \zeta) \in c_{00}^2$ tels que :

$$\|\eta - \zeta\|_{\Lambda_{N_k}} = 2\tau \text{ et } g\left(\mathrm{Mid}\left(\eta, \zeta, \frac{1}{k}\right)\right) \subset \mathrm{Mid}\left(g(\eta), g(\zeta), \frac{2}{k}\right).$$

Notons $\xi = \dfrac{\eta + \zeta}{2}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la base canonique de c_{00}.
Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\eta, \zeta \in \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_{m-1}\}$.
• Soit $j \geq m$. Montrons que $\xi + \tau\sigma_k^{-1}e_j \in \mathrm{Mid}\left(\eta, \zeta, \frac{1}{k}\right)$.
On a :

$$\begin{aligned}\|\eta - (\xi + \tau\sigma_k^{-1}e_j)\|_{\Lambda_{N_k}} = \left\|\frac{\zeta - \eta}{2} - \tau\sigma_k^{-1}e_j\right\|_{\Lambda_{N_k}} &= N_k\left(\frac{\|\zeta - \eta\|_{\Lambda_{N_k}}}{2}, \tau\sigma_k^{-1}\right)\\ &= \tau N_k\left(1, \frac{1}{\sigma_k}\right) = \tau\left(1 + F_k\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)\right) = \tau\left(1 + \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

De même, $\|\eta - (\xi + \tau\sigma_k^{-1}e_j)\|_{\Lambda_{N_k}} = \tau\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ donc $\xi + \tau\sigma_k^{-1}e_j \in \mathrm{Mid}\left(\eta, \zeta, \frac{1}{k}\right)$.
• Comme $g\left(\mathrm{Mid}\left(\eta, \zeta, \frac{1}{k}\right)\right) \subset \mathrm{Mid}\left(g(\eta), g(\zeta), \frac{2}{k}\right)$, on en déduit que :

$$\forall j \geq m, h_j := f\left(\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i\varepsilon_i \otimes x_i + \tau\sigma_k^{-1}\varepsilon_j \otimes x_j\right) = g(\xi + \tau\sigma_k^{-1}e_j) \in \mathrm{Mid}\left(g(\eta), g(\zeta), \frac{2}{k}\right).$$

De plus, pour tout $j \geq m$, si on pose $h'_j = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \xi_i \varepsilon_i \otimes x_i + \tau\sigma_k^{-1}\varepsilon_m \otimes x_j\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\|h'_j - g(\eta)\| &= \mathbb{E}\left(\left\| f\left(\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i\varepsilon_i x_i + \tau\sigma_k^{-1}\varepsilon_m x_j\right) - g(\eta)\right\|\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\left\| f\left(\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i\varepsilon_i x_i + \tau\sigma_k^{-1}\varepsilon_j x_j\right) - g(\eta)\right\|\right) \quad \text{car } \eta \in \mathrm{Vect}\{e_1, \cdots, e_{m_1}\}\\ &= \|h_j - g(\eta)\| \leq \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{\|g(\eta) - g(\zeta)\|}{2}\end{aligned}$$

et, de même, $\|h'_j - g(\zeta)\| \leq \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{\|g(\eta) - g(\zeta)\|}{2}$, donc $h'_j \in \mathrm{Mid}\left(g(\eta), g(\zeta), \frac{2}{k}\right)$.
On en déduit que, pour tout $j \geq m$, on a :

$$\|g(\eta) - h'_j\| + \|g(\zeta) - h'_j\| - \|g(\eta) - g(\zeta)\| \leq \frac{2}{k}\|g(\eta) - g(\zeta)\| \quad (\triangle).$$

Notons de plus que, pour tout $i > j \geq m$, on a :

$$\forall s \in \Delta, \|h'_i(s) - h'_j(s)\| \geq \|\tau\sigma_k^{-1}\varepsilon_m(s)(x_i - x_j)\| - 1 \geq \tau\sigma_k^{-1}\theta - 1.$$

• D'après $(*)$, dès que $\tau > \dfrac{\sigma_k}{\theta}$, pour tout $s \in \Delta$, comme $(h'_j(s))_{j=m}^{\infty}$ est bornée, on a alors :

$$\liminf_{j\to+\infty}(\|g(\eta)(s) - h'_j(s)\| + \|g(\zeta)(s) - h'_j(s)\|) \geq N_Y(\|g(\eta)(s) - g(\zeta)(s)\|, \tau\sigma_k^{-1}\theta - 1).$$

En intégrant (l'intégrale étant ici simplement une somme finie), on a donc :

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to+\infty}(\|g(\eta) - h'_j\| + \|g(\zeta) - h'_j\|) &\overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_\Delta \liminf_{j\to+\infty}(\|g(\eta)(s) - h'_j(s)\| + \|g(\zeta)(s) - h'_j(s)\|)d\mathbb{P}(s)\\ &\geq \int_\Delta N_Y(\|g(\eta)(s) - g(\zeta)(s)\|, \tau\sigma_k^{-1}\theta - 1)d\mathbb{P}(s)\\ &\geq N_Y\left(\int_\Delta \|g(\eta)(s) - g(\zeta)(s)\|d\mathbb{P}(s), \int_\Delta (\theta\tau\sigma_k^{-1} - 1)d\mathbb{P}(s)\right)\\ &= N_Y(\|g(\eta) - g(\zeta)\|, \theta\tau\sigma_k^{-1} - 1).\end{aligned}$$

Or :

$$\|g(\eta) - g(\zeta)\| \leq 4K\|\eta - \zeta\|_{\Lambda_{N_k}} + 1 = 8K\tau + 1$$

et la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto N_Y(t, 1) - t = tF\left(\frac{1}{t}\right)$ est décroissante (car $u \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{F(u)}{u}$ est croissante d'après l'inégalité des pentes) donc :

$$\begin{aligned}\liminf_{j\to+\infty}(\|g(\eta) - h'_j\| + \|g(\zeta) - h'_j\| - \|g(\eta) - g(\zeta)\|) &\geq N_Y(\|g(\eta) - g(\zeta)\|, \theta\tau\sigma_k^{-1} - 1) - \|g(\eta) - g(\zeta)\|\\ &\geq N_Y(8K\tau + 1, \theta\tau\sigma_k^{-1} - 1) - 8K\tau + 1\end{aligned}$$

d'où, par $(\triangle)$:

$$N_Y(8K\tau + 1, \theta\tau\sigma_k^{-1} - 1) - 8K\tau + 1 \leq \frac{2}{k}\|g(\eta) - g(\zeta)\| \leq \frac{2(8K\tau + 1)}{k}$$

i.e :
$$N_Y\left(1, \frac{\theta - \sigma_k\tau^{-1}}{\sigma_k(8K+\tau^{-1})}\right) = N_Y\left(1, \frac{\theta\tau\sigma_k^{-1} - 1}{8K\tau + 1}\right) \leq \frac{2}{k} + 1$$
ce qui assure que $N_Y\left(1, \dfrac{\theta}{8\sigma_k K}\right) \leq 1 + \dfrac{2}{k}$, ou encore :
$$\int_0^{\frac{\theta}{8\sigma_k K}} \frac{\hat{\delta}_Y(s)}{s} ds \leq \frac{2}{k}.$$
Or $s \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\hat{\delta}_Y(s)}{s}$ est croissante donc :
$$\hat{\delta}_Y\left(\frac{\theta}{16K\sigma_k}\right) \leq \int_{\frac{\theta}{16K\sigma_k}}^{\frac{\theta}{8\sigma_k K}} \frac{\hat{\delta}_Y(s)}{s} ds \times \frac{16K\sigma_k}{\theta} \times \frac{\theta}{16K\sigma_k} \leq \int_0^{\frac{\theta}{8\sigma_k K}} \frac{\hat{\delta}_Y(s)}{s} ds \leq \frac{2}{k}$$
d'où :
$$\hat{\delta}_Y\left(\frac{\theta}{32K\sigma_k}\right) \leq \frac{1}{k}$$
On a donc :
$$\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\hat{\delta}_Y}} \leq 32K\theta^{-1}\sigma_k$$
ce qui assure le résultat avec $c = \frac{1}{64K}$ par exemple. □

Remarque 21. *Avec ce théorème, on retrouve le fait que, pour $1 \leq p < q < +\infty$, ℓ_q ne se plonge pas grossièrement Lipschitz dans ℓ_p. En effet, si c'était le cas, il existerait une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Ck^{\frac{1}{p}} \leq k^{\frac{1}{q}}$, ce qui est impossible.*

En combinant ce théorème et le théorème 14, on obtient le résultat suivant concernant les modèles étalés d'un espace de Banach se plongeant grossièrement Lipschitz dans un espace réflexif :

Théorème 26. *Soit X, Y deux espaces de Banach vérifiant : Y est réflexif et $X \underset{CL}{\hookrightarrow} Y$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout modèle étalé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'une suite faiblement nulle de X, on ait :*
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{C}\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\delta}_Y}} \leq \|e_1 + \cdots + e_k\|_S \leq C\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\rho}_Y}}.$$
De façon équivalente, si $\overline{\delta}_Y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que toute suite normalisée faiblement nulle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ admette une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{C}\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\delta}_Y}} \leq \|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \leq C\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\rho}_Y}}.$$

Démonstration. Tout modèle étalé d'une suite normalisée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ faiblement nulle est 2-inconditionnel et, de toute suite normalisée faiblement nulle, on peut extraire une sous-suite $\frac{1}{2}$-séparée donc, comme $\overline{\delta}_Y \leq \hat{\delta}_Y$, on déduit le côté gauche de l'inégalité du théorème 25. Montrons désormais le côté droit de l'inégalité.

Par hypothèse, il existe un plongement grossièrement Lipschitzien $f : X \to Y$. On peut supposer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in X^2, \|x-y\| - 1 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x-y\| + 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Munissons $[\mathbb{N}^*]^k$ de la distance suivante :

$$\forall \overline{n} = (n_1, \cdots, n_k), \overline{m} = (m_1, \cdots, m_k) \in [\mathbb{N}^*]^k, d(\overline{n}, \overline{m}) = \mathrm{Card}\{i \in [|1,k|], n_i \neq m_i\}.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite étalante normalisée faiblement nulle générant le modèle étalé $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$F_\lambda : \left\{ \begin{array}{lll} [\mathbb{N}^*]^k & \to & Y \\ (n_1, \cdots, n_k) & \mapsto & f(\lambda(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})) \end{array} \right.$$

qui est $(2\lambda K + 1)$-Lipschitzienne. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.
D'après le théorème 14, il existe $\mathbb{M} \in [\mathbb{N}^*]^\omega$ tel que, pour tous $(n_1, \cdots, n_k), (m_1, \cdots, m_k) \in [\mathbb{M}]^k$, on ait :

$$\|F_\lambda(n_1, \cdots, n_k) - F_\lambda(m_1, \cdots, m_k)\| \leq 2e(2\lambda C + 1)\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\rho}_Y}} + 1$$

d'où pour tous $(n_1, \cdots, n_k), (m_1, \cdots, m_k) \in [\mathbb{M}]^k$, on a :

$$\begin{aligned} \|x_{n_1} + \cdots x_{n_k} - x_{m_1} - \cdots - x_{m_k}\| &\leq \frac{1 + \|F_\lambda(n_1, \cdots, n_k) - F_\lambda(m_1, \cdots, m_k)\|}{\lambda} \\ &\leq 2e\left(2C + \frac{1}{\lambda}\right)\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\rho}_Y}} + \frac{2}{\lambda}; \end{aligned}$$

en faisant tendre $(m_1, \cdots, m_k)$ vers $+\infty$ puis λ vers $+\infty$, on a :

$$\|x_{n_1} + \cdots x_{n_k}\| \leq 4eC\|e_1 + \cdots + e_k\|_{\ell_{\overline{\rho}_Y}}$$

d'où le résultat. □

Pour finir, montrons les trois résultats ci-dessous avant de conclure.

Proposition 26. *Soit $1 < p < +\infty$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de dimension finie, $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.*
Si une des conditions suivantes :
(i) $1 < p < r \leq 2$ et les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément r-uniformément lisses ;
(ii) $2 \leq r < p + \infty$ et les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément r-uniformément convexes ;
est vérifiée, alors X est super-réflexif.

Démonstration. • Supposons que la condition (i) est vérifiée.
Il suffit de montrer que X est uniformément lisse, *i.e* $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1; x \in S_X, y \in tS_X\right\}.$$

Par hypothèse, il existe $C \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x, y \in E_n, \frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \leq \|x\|^r + C^r\|y\|^r.$$

Montrons alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x, y \in E_n, \frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} \leq \|x\|^p + C^p\|y\|^p.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) \in E_n^2$. Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un couple de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\|x+y\|^p + \|x-y\|^p}{2} &= \mathbb{E}(\|\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y\|^p) \overset{p \leq r}{\leq} \mathbb{E}(\|\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y\|^r)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \mathbb{E}(\|x\|^r + C^r\|y\|^r)^{\frac{p}{r}} \overset{p \leq r}{\leq} \|x\|^p + C^p\|y\|^p\end{aligned}$$

donc les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément p-uniformément lisses.
On en déduit que, pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X$, pour tout $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] - 1 \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p + \|x_n - y_n\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \text{ par concavité} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|^p + C^p\|y_n\|^p)\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \\ &= (\|x\|^p + C^p\|y\|^p)^{\frac{1}{p}} - 1\end{aligned}$$

donc, pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{\rho_X(t)}{t} \leq \frac{(1 + C^p t^p)^{\frac{1}{p}} - 1}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{p} C^p t^{p-1}$$

d'où le caractère uniformément lisse de X.
• Supposons que la condition (i) est vérifiée.
Il suffit de montrer que X est uniformément convexe. Pour cela, on note s l'exposant conjugué de r, q l'exposant conjugué de p, et on remarque que les E_n^*, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément s-uniformément lisses. Comme $1 < q < s \leq 2$, on déduit de (i) que X^* est uniformément lisse, d'où X est uniformément convexe. □

Remarque 22. *Une façon plus simple de prouver ce résultat aurait été d'utiliser la proposition 22.*

Théorème 27. *Soit $1 < p + \infty$, $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'espaces de dimension finie, $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$, Y un espace de Banach.*
Si une des conditions suivantes :
(i) $1 < p < r \leq 2$ et les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément r-uniformément lisses ;
(ii) $2 \leq r < p + \infty$ et les E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément r-uniformément convexes ;
est vérifiée et que Y se plonge grossièrement Lipschitz dans X, alors Y a la propriété $(\tilde{m}_p)$.

Démonstration. Commençons par remarquer que, d'après la proposition 26, X est super-réflexif dans les deux cas. C'est donc également le cas de Y. On peut également supposer $\dim(Y) = +\infty$,

le résultat étant clair sinon.
• Supposons que la condition (i) est vérifiée.
Par hypothèse, il existe $C \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x, y \in E_n, \frac{\|x+y\|^r + \|x-y\|^r}{2} \leq \|x\|^r + C^r \|y\|^r.$$

$*$ Montrons que $V : \left\{ \begin{array}{lcl} X & \to & \ell_p \\ x & \mapsto & (\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$ est une L_p-norme aléatoire de type r.
Le fait que V soit une L_p-norme est clair. De plus, pour tout $(x,y) \in X^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{V(x+y)^p + V(x-y)^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left[\left(\frac{\|x_n+y_n\|^p + \|x_n-y_n\|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]_{n\in\mathbb{N}^*} \\
&= \left[\left(\frac{(\|x_n+y_n\|^r)^{\frac{p}{r}} + (\|x_n-y_n\|^r)^{\frac{p}{r}}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]_{n\in\mathbb{N}^*} \\
&\leq \left[\left(\frac{\|x_n+y_n\|^r + \|x_n-y_n\|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\right]_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{par concavité} \\
&\leq \left((\|x_n\|^r + C^r\|y_n\|^r)^{\frac{1}{r}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \\
&= ((Vx)^r + C^r (Vy)^r)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

donc V est une L_p-norme aléatoire de type r.
$*$ On en déduit que V induit une L_p-norme aléatoire de type r sur $X_{\mathcal{U}}$.
En effet, $\tilde{V} : \left\{ \begin{array}{lcl} X_{\mathcal{U}} & \to & (\ell_p)_{\mathcal{U}} \\ (x_i)_{\mathcal{U}} & \mapsto & (Vx_i)_{\mathcal{U}} \end{array} \right.$ est bien définie car :

$$\forall (x_i)_{\mathcal{U}} \subset X, \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0 \implies \lim_{\mathcal{U}} \|V(x_i)\|_p = 0$$

et est une L_p-norme aléatoire de type r.
$*$ Comme $Y \underset{CL}{\hookrightarrow} X$, $Y \underset{L}{\hookrightarrow} X_{\mathcal{U}}$. Or X est super-réflexif donc $X_{\mathcal{U}}$ est réflexif et a par conséquent (RNP). Comme Y est séparable, Y est linéairement isomorphe à un sous-espace (séparable) de $X_{\mathcal{U}}$.
Comme Y a la propriété p-co-Banach-Saks d'après le théorème 26 (car X est p-AUC), le théorème 24 assure alors que Y a $(\tilde{m}_p)$.
• Supposons que la condition (ii) est vérifiée. Notons q l'exposant conjugué de p, s celui de r. On sait que Y^* est linéairement isomorphe à un sous-espace (séparable) de $(X_{\mathcal{U}})^* \simeq X_{\mathcal{U}}^*$. De plus, comme les E_n^*, $n \in \mathbb{N}^*$, sont uniformément s-uniformément lisses, on montre comme ci-dessus que $X_{\mathcal{U}}^*$ admet une L_q-norme aléatoire de type s. D'après le théorème 26, Y a la propriété p-Banach-Saks (car X est p-AUS) donc, d'après la proposition 24, Y^* a la propriété q-co-Banach-Saks. Le théorème 24 assure alors que Y^* a la propriété $(\tilde{m}_q)$. Finalement, on en déduit que Y a la propriété $(\tilde{m}_p)$. □

Remarque 23. *On utilisera dans la suite le fait suivant : un espace de Banach X a (UAP) si et seulement si $X_{\mathcal{U}}$ a (BAP).*

Théorème 28. (i) *Soit $1 < p < r \leq 2$, Z un espace de Banach r-uniformément lisse avec (UAP), $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie uniformément complémentés dans Z, $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.*

Alors, pour tout espace de Banach Y, on a :

$$Y \underset{N}{\sim} X \implies Y \simeq X;$$

(ii) Soit $2 \leq r < p < +\infty$, Z un espace de Banach r-uniformément convexe avec (UAP), $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie uniformément complémentés dans Z, $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.
Alors, pour tout espace de Banach Y, on a :

$$Y \underset{N}{\sim} X \implies Y \simeq X.$$

Démonstration. Supposons que l'on soit dans l'un des deux cas.
Étape 1 : $X \simeq \ell_p(X)$
Il existe une bijection $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{N}^* & \to & (\mathbb{N}^*)^2 \\ n & \mapsto & \psi(n) = (\psi(n)_1, \psi(n)_2) \end{array} \right.$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\psi(n)_1 \leq n$.
Par hypothèse, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une projection linéaire continue $P_n : Z \to E_n$ de Z dans E_n vérifiant $\|P_n\| \leq C$.
Comme la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\psi(n)_1 \leq n$, l'application

$$Q : \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\psi(n)_1}\right)_{\ell_p} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (P_{\psi(n)_1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

est une projection linéaire continue vérifiant $\|Q\| \leq C$.
De plus, si, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\{n \in \mathbb{N}^*; \psi(n)_1 = j\} = \{n_{j,k}, k \in \mathbb{N}^*\}$$

on remarque que l'application

$$J : \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\psi(n)_1}\right)_{\ell_p} & \to & \ell_p(X) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & ((x_{n_{j,k}})_{j\in\mathbb{N}^*})_{k\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire surjective donc $\ell_p(X)$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de X, *i.e* il existe un sous-espace fermé W de X tel que $W \oplus \ell_p(X) \simeq X$. On a donc :

$$X \simeq \ell_p(X) \oplus W \simeq \ell_p(X) \oplus \ell_p(X) \oplus W \simeq \ell_p(X) \oplus X \simeq \ell_p(X).$$

Étape 2 : X a (UAP)
D'après le théorème 9.4 de [11], comme Z a (UAP), l'espace $\ell_p(Z)$ a également (UAP).
• On note que X est un sous-espace complémenté de $\ell_p(Z)$ car l'application

$$P : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell_p(Z) & \to & \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (P_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

est une projection linéaire continue vérifiant $\|P\| \leq C$.
• Déduisons-en que X a (UAP). Soit $m \in \mathbb{N}^*$, F est un sous-espace vectoriel de X de dimension

m.
Comme $\ell_p(Z)$ a (UAP), il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $m' \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, si F' est un sous-espace vectoriel de $\ell_p(Z)$ de dimension m', on peut trouver un opérateur $T : \ell_p(Z) \to \ell_p(Z)$ de rang plus petit que n, vérifiant $\|T\| \leq K$ et $T_{|F'} = Id_{F'}$.
On en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $T : \ell_p(Z) \to \ell_p(Z)$ de rang plus petit que n, vérifiant $\|T\| \leq K$ et $T_{|F} = Id_F$. Alors $S = P \circ T_{|X} : X \to X$ est de rang plus petit que n, $\|S\| \leq KC$ et $S_F = Id_F$.
D'où X a (UAP).
En particulier, $X_{\mathcal{U}}$ a (BAP).
Soit Y un espace de Banach vérifiant $Y \underset{N}{\sim} X$.
Étape 3 : Y est isomorphe à un sous-espace complémenté de X
$*$ Comme $Y \underset{N}{\sim} X$, on a $X_{\mathcal{U}} \underset{L}{\sim} Y_{\mathcal{U}}$, avec $X_{\mathcal{U}}$ qui a (BAP) d'après la remarque 23. Le théorème 5.4 de [9] assure alors que $Y_{\mathcal{U}}$ a (BAP) et ainsi que Y a (UAP). En particulier, Y a (AP).
De plus, comme $Y \underset{CL}{\hookrightarrow} X$, Y a $(\tilde{m_p})$ d'après le théorème 27.
$*$ D'après le théorème 22, il existe alors une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sous-espaces de dimension finie de Y telle que Y soit linéairement isomorphe à un sous-espace complémenté de $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p}$.
Le théorème de Ribe assure alors qu'il existe $K \geq 1$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de X tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n soit K-isomorphe à F_n. L'espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{\ell_p}$ est alors K-isomorphe à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p}$.
$*$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que l'on peut supposer que F_n est de la forme $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} E_j\right)_{\ell_p}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\eta \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{1-2\eta} < 1+\varepsilon$. Il existe un η-réseau $(x^1, \cdots, x^N)$ de S_{F_n} et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in [|1,N|]$, on ait :

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 1-\eta.$$

Posons alors $T : \left\{ \begin{array}{lcl} F_n & \to & \left(\sum\limits_{j=1}^{k} E_j\right)_{\ell_p} \\ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (x_1, \cdots, x_k) \end{array} \right.$. Clairement, pour tout $x \in F_n$, $\|Tx\| \leq \|x\|$.
Soit $x \in F_n$. Il existe $i \in [|1,N|]$ tel que $\|x^i - x\| \leq \eta$. On a alors :

$$\|Tx\| \geq \|Tx^i\| - \|T(x-x^i)\| \geq 1-\eta-\eta = 1-2\eta$$

d'où F_n est $1+\varepsilon$-isomorphe à $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} E_j\right)_{\ell_p}$.

On peut donc supposer que F_n est de la forme $\left(\sum\limits_{j=1}^{k_n} E_j\right)_{\ell_p}$, $k_n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{k_n} E_j\right)_{\ell_p}\right)_{\ell_p}$ est complémenté dans $\ell_p(X)$, qui est isomorphe à X, d'où Y est isomorphe à un sous-espace complémenté de X.

Étape 4 : X est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y
Appliquons le théorème 23.
D'après la proposition 19, $\ell_p(X)$ est isomorphe à un sous-espace de $Y_{\mathcal{U}}$. On en déduit que les $\ell_p^m(E_n)$, $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, sont uniformément complémentés dans $Y_{\mathcal{U}}$. Or $Y_{\mathcal{U}}$ est finiment représentable dans Y donc, d'après le théorème de Ribe, il existe une constante $\lambda \geq 1$ telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_p^m(E_n)$ soit λ-isomorphe à un sous-espace λ-complémenté de Y.
Le théorème 23 assure alors que X est isomorphe à un sous-espace complémenté de Y.
Étape 5 : Conclusion
D'après les étapes 3 et 4, il existe E un sous-espace fermé de X, F un sous-espace fermé de Y tels que $X \simeq Y \oplus E$, $Y \simeq X \oplus F$. Or $X \simeq \ell_p(X)$ d'après l'étape 1 donc :

$$X \simeq \ell_p(X) \simeq \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \simeq Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \simeq \ell_p(X) \oplus Y \simeq \ell_p(X) \oplus X \oplus F \simeq \ell_p(X) \oplus F \simeq X \oplus F \simeq Y$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons désormais montrer le résultat souhaité.

Corollaire 9. *Soit* $(p, r) \in]1, +\infty[^2$. *Posons* $X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_r^n \right)_{\ell_p}$.
(i) Si $p < \min(r, 2)$, *alors, pour tout espace de Banach* Y, *on a :*

$$Y \underset{N}{\sim} X \implies Y \simeq X;$$

(ii) Si $p > \max(r, 2)$, *alors, pour tout espace de Banach* Y, *on a :*

$$Y \underset{N}{\sim} X \implies Y \simeq X.$$

Démonstration. Il est clair que les sous-espaces ℓ_r^n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont uniformément complémentés dans ℓ_r. De plus, ℓ_r a (UAP) (cf [27]).
(i) Posons $s = \min(r, 2)$. D'après le théorème 28, il suffit de remarquer que ℓ_r est s-uniformément lisse (cf [23]) pour en déduire le résultat.
(ii) Posons $s = \max(r, 2)$. De même, d'après le théorème 28, il suffit de remarquer que ℓ_r est s-uniformément convexe (cf [23]) pour conclure. □

Si $r = 2$, on dispose d'une preuve plus simple de ce résultat. Avant de l'exposer, rappelons les inégalités de Khintchine.
On rappelle tout d'abord que les fonctions de Rademacher sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], r_n(t) = \operatorname{sgn}[\sin(2^n \pi t)].$$

Notons que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de L_2.

Théorème 29. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *notons* $E_n = \langle r_1, \cdots, r_n \rangle$ *et* $T_n : \begin{cases} \ell_2^n & \to & E_n \\ (a_1, \cdots, a_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \end{cases}$.
Pour tout $p \in [1, +\infty[$, *il existe des constantes* $A_p, B_p \in \mathbb{R}^{+*}$ *telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \ell_2^n, A_p \|a\|_2 \leq \|T_n(a)\|_{L_p} \leq B_p \|a\|_2.$$

Si $p \in [2, +\infty[$, *on peut prendre* $A_p = 1$ *et, si* $p \in [1, 2]$, *on peut prendre* $B_p = 1$.

A l'aide de ces inégalités, on montre le théorème suivant qui, combiné au théorème 12, permet de reprouver le dernier corollaire 9.

Théorème 30. *Pour tout* $p \in]1,+\infty[$, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p} \simeq \ell_p$.

Démonstration. D'après la proposition 7, il suffit de considérer le cas $p \in [2,+\infty[$. On reprend les notations du théorème 29.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la projection orthogonale de L_2 sur E_n. Notons $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur L_2.

Notons que, pour toute $f \in L_p \subset L_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème 29, on a :

$$\|P_n f\|_{L_p} = \|T_n((\langle f, r_k\rangle)_{k=1}^n)\|_{L_p} \leq B_p \|(\langle f, r_k\rangle)_{k=1}^n\|_2 = B_p\|P_n f\|_{L_2} \leq B_p\|f\|_2 \leq B_p\|f\|_p.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons F_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices des intervalles $I_{k,n} = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[$, pour $k \in [|1, 2^n|]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout $k \in [|1,n|]$, $r_k \in F_n$ donc E_n est un sous-espace vectoriel de F_n.

Notons que, comme les intervalles $I_{k,n}$, $k \in [|1, 2^n|]$, sont deux à deux disjoints, l'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ell_p^{2^n} & \to & (F_n, \|.\|_{L_p}) \\ (a_k)_{k=1}^{2^n} & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{2^n} a_k I_{k,n} \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire surjective.

• Munissons E_n et F_n de la norme $\|.\|_{L_p}$. Montrons que $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$ est isomorphe à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.

Pour cela, montrons que l'application ψ définie par :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (T_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x_n\|_p^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} B_p^p \|x_n\|_2^p = B_p^p \|x\|^p$$

donc ψ est bien définie. Comme ψ est linéaire, ψ est continue et on note qu'elle est surjective. De plus, pour tout $x \in \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$, on a $\|\psi(x)\| \geq \|x\|$ donc $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$ est isomorphe à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$.

• Comme l'application définie par :

$$P : \left\{ \begin{array}{lcl} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p} & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & (P_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

est une projection bien définie vérifiant :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p}, \|Px\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_p^p \|x_n\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{p}} = B_p\|x\|$$

l'espace $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{\ell_p}$ est complémenté dans $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{\ell_p}$.

• Montrons enfin que ℓ_p est isométrique à $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_p^{2^n}\right)_{\ell_p}$.

Il suffit pour cela de noter que l'application définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \ell_p & \to & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_p^{2^n}\right)_{\ell_p} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \mapsto & ((x_{g(n,k)})_{k=1}^{2^n})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases} \quad \text{où } g(n,k) = \sum_{j=1}^{n-1} 2^j + k$$

est une isométrie linéaire surjective.

• Finalement, on en déduit que $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$ est isomorphe à un sous-espace complémenté de ℓ_p, d'où, d'après le théorème de Bessaga-Pelczynski, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}$ est isomorphe à ℓ_p. □

Corollaire 10. *Soit $p \in]1, +\infty[$, X un espace de Banach. On a :*

$$X \underset{N}{\sim} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p} \implies X \simeq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ell_2^n\right)_{\ell_p}.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 12. □

Pour terminer ce mémoire, montrons en annexe que les types de Rademacher et d'Enflo coïncident. Ce résultat, très attendu, a été récemment prouvé par Paata Ivanisvili, Ramon van Handel et Alexander Volberg (cf [14]).

A Article "Rademacher type and Enflo type coincide"

L'objectif de cette partie est de montrer que les types de Rademacher et d'Enflo, définis plus loin, coïncident, et de donner une condition nécessaire et suffisante permettant d'énoncer l'inégalité de Pisier avec une constante indépendante de la dimension.

A.1 Préliminaires

Commençons par introduire un peu de vocabulaire.

Définition 27. *Soit X un espace de Banach, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \{-1,1\}^n \to X$, $j \in [|1,n|]$.*
• *La j-ième dérivée partielle discrète de f sur le cube $\{-1,1\}^n$ est la fonction :*

$$D_j f : \begin{cases} \{-1,1\}^n & \to \quad X \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto \quad \dfrac{f(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)}{2} \end{cases} .$$

• *Le Laplacien de f sur ce cube discret est $\Delta f = -\sum\limits_{j=1}^{n} D_j f$.*

Définition 28. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $p \in [1,2]$, $q \in [2, +\infty[$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher.*
• *On dit que X est de type p-Rademacher s'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in X^n, \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^p\right) \leq C^p \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p.$$

On note alors $T_p^R(X)$ la plus petite constante C possible vérifiant cette inégalité.
• *On dit que X est de type p-Enflo s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f : \{-1,1\}^n \to X$, on ait :*

$$\mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) \leq C^p \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\|D_j f(\varepsilon)\|^p\right).$$

On note alors $T_p^E(X)$ la plus petite constante C possible vérifiant cette inégalité.
• *On dit que X est de cotype q(-Rademacher) s'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in X^n, \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \leq C^q \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^q\right).$$

On note alors $C_q(X)$ la plus petite constante C possible vérifiant cette inégalité.

Remarque 24. *Notons que l'on pourrait définir plus généralement le type d'Enflo pour un espace métrique, alors que le type de Rademacher est une notion purement linéaire.*

Commençons par énoncer un premier résultat immédiat dont nous aurons besoin par la suite.

Lemme 13. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $q \in [2, +\infty[$, $p \in [q, +\infty[$.
Si X est de cotype q, alors X est de cotype p et $C_p(X) \leq C_q(X)$.*

Démonstration. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. Supposons que X soit de cotype q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$, comme $q \leq p$, on a :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(X)\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(X)\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où le résultat. □

Remarque 25. *On montre de la même manière que si X est de type p-Rademacher ($p \in [1, 2]$), alors, pour tout $q \in [1, p]$, X est de type q-Rademacher et $T_q^R(X) \leq T_p^R(X)$.*

Afin de montrer que les types coïncident, nous aurons besoin de quelques notions concernant les fonctions convexes.

Définition 29. *Soit X un espace de Banach, $f : X \to [-\infty, +\infty]$ une fonction.*
• *La conjuguée de Fenchel de f est la fonction suivante :*

$$f^* : \left\{ \begin{array}{lll} X^* & \to & [-\infty, +\infty] \\ x^* & \mapsto & \sup\limits_{x\in X}\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\} \end{array} \right. .$$

• *On peut considérer la fonction conjugée de f^*, appelée biconjuguée de f, et notée f^{**}.*
• *On dit que f est semi-continue inférieurement en $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall y \in X, \|x - y\| \leq \eta \implies f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

• *On dit que f est semi-continue inférieurement si, pour tout $x \in X$, f est semi-continue inférieurement en x.*

Remarque 26. *La fonction f^* est convexe et si f n'est pas constamment égale à $+\infty$, alors f^* ne prend jamais la valeur $-\infty$.*

Admettons le théorème suivant, dont on pourra trouver une preuve dans [5].

Théorème 31. *Soit X un espace de Banach, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement en x_0.
Pour tout $\alpha < f(x_0)$, il existe $x^* \in X^*$ tel que :*

$$\forall x \in X, x^*(x) - x^*(x_0) \leq f(x) - \alpha.$$

Proposition 27. *Soit X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On a :
(i) $f^{**}_{|X} \leq f$;
(ii) Si f est convexe et semi-continue inférieurement, alors $f^{**}_{|X} = f$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que, pour tout $x \in X$, on a :

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*, x\rangle - f^*(x^*)\}.$$

(i) Soit $x \in X$, $x^* \in X^*$. Par définition de f^*, on a :

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle - f(x)$$

donc :

$$f(x) \geq \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)$$

d'où, pour tout $x \in X$, on a :

$$f(x) \geq \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)\} = f^{**}(x).$$

(ii) Supposons f semi-continue inférieurement. Soit $x_0 \in X$. On sait par (i) que $f^{**}(x_0) \leq f(x_0)$. Il suffit alors de montrer que, pour tout $\alpha < f(x_0)$, on a $\alpha \leq f^{**}(x_0)$.
Soit donc $\alpha < f(x_0)$. D'après le théorème 31, il existe $x^* \in X^*$ tel que :

$$\forall x \in X, x^*(x) - x^*(x_0) \leq f(x) - \alpha.$$

On en déduit que, pour tout $x \in X$, $x^*(x) - f(x) \leq x^*(x_0) - \alpha$ d'où $f^*(x^*) \leq x^*(x_0) - \alpha$. On a donc :

$$\alpha \leq x^*(x_0) - f^*(x^*) \leq f^{**}(x_0)$$

d'où le résultat. □

On dispose du résultat suivant concernant le laplacien :

Lemme 14. *Soit X un espace de Banach, $n \in \mathbb{N}^*$, $(\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher.*
(i) Pour toutes $f : \{-1,1\}^n \to X$ et $g : \{-1,1\}^n \to X^*$, on a :

$$\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), \Delta f(\varepsilon) \rangle) = \mathbb{E}(\langle \Delta g(\varepsilon), f(\varepsilon) \rangle);$$

(ii) Pour toutes $f : \{-1,1\}^n \to X$ et $g : \{-1,1\}^n \to X^*$, on a :

$$\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), \Delta f(\varepsilon) \rangle) = -\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\langle D_j g(\varepsilon)), D_j f(\varepsilon) \rangle].$$

Démonstration. Soit $f : \{-1,1\}^n \to X$ et $g : \{-1,1\}^n \to X^*$.
(i) Il suffit de montrer que, pour tout $j \in [|1, n|]$, on a $\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon) \rangle) = \mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), f(\varepsilon) \rangle)$.

Soit $j \in [|1,n|]$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \left\langle g(x_1,\cdots,x_n), \frac{f(x_1,\cdots,x_n) - f(x_1,\cdots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)}{2} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \langle g(x_1,\cdots,x_n), f(x_1,\cdots,x_n)\rangle \right. \\
&\left. - \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \langle g(x_1,\cdots,x_n), f(x_1,\cdots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \langle g(x_1,\cdots,x_n), f(x_1,\cdots,x_n)\rangle \right. \\
&\left. - \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \langle g(x_1,\cdots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\cdots,x_n), f(x_1,\cdots,x_n)\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n} \left\langle \frac{g(x_1,\cdots,x_n) - g(x_1,\cdots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)}{2}, f(x_1,\cdots,x_n) \right\rangle \\
&= \mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), f(\varepsilon)\rangle)
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), \Delta f(\varepsilon)\rangle) = \mathbb{E}(\langle \Delta g(\varepsilon), f(\varepsilon)\rangle)$.
(ii) Notons que, pour tout $j \in [|1,n|]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) &= \mathbb{E}[\langle 2D_j g(\varepsilon) - g(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{j-1},-\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1},\cdots,\varepsilon_n), D_j f(\varepsilon)\rangle] \\
&= 2\mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) + \mathbb{E}[\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{j-1},-\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1},\cdots,\varepsilon_n)\rangle] \\
&= 2\mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) - \mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle)
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) = \mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle)$ d'où :

$$\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), \Delta f(\varepsilon)\rangle) = -\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle) = -\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\langle D_j g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle)$$

ce qui assure le résultat. □

Remarque 27. *En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour toutes $f : \{-1,1\}^n \to X$ et $g : \{-1,1\}^n \to X^*$, on a :*

$$\mathbb{E}(\langle g(\varepsilon), P_t f(\varepsilon)\rangle) = \mathbb{E}(\langle P_t g(\varepsilon), f(\varepsilon)\rangle)$$

où $P_t := e^{t\Delta}$.

Pour la suite, fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un espace de Banach $(X, \|.\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi de Rademacher. Introduisons également, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, une famille $\xi(t) = (\xi_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles, indépendante de ε vérifiant :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\xi_j(t) = 1) = \frac{1+e^{-t}}{2} \text{ et } \mathbb{P}(\xi_j(t) = -1) = \frac{1-e^{-t}}{2}$$

et la famille de variables normalisées $\delta(t)$ associée :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \delta_j(t) = \frac{\xi_j(t) - \mathbb{E}(\xi_j(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} = \frac{\xi_j(t) - e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}.$$

Le lemme suivant nous sera d'une grande utilité dans la suite :

Lemme 15. *Soit $f : \{-1,1\}^n \to X$, $j \in [|1,n|]$.*
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, on a :

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x_1\xi_1(t), \cdots, x_n\xi_n(t)))$$

et :

$$D_j P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t} - 1}} \mathbb{E}[\delta_j(t) f(x_1\xi_1(t), \cdots, x_n\xi_n(t))].$$

Démonstration. Pour tous $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \{-1,1\}^n$, on pose $Q_t f(x) = \mathbb{E}(f(x_1\xi_1(t), \cdots, x_n\xi_n(t)))$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Par définition de $\xi(t)$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, on a :

$$Q_t f(x) = \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{1 + \xi_j e^{-t}}{2}\right] f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n)$$

et, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, pour tout $j \in [|1,n|]$:

$$Q_t f(x_1, \cdots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) = \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \xi_i e^{-t}}{2}\right] \frac{1 - \xi_j e^{-t}}{1 + \xi_j e^{-t}} f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n).$$

Or, pour tout $\gamma \in \{-1,1\}$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 - \gamma e^{-t}}{1 + \gamma e^{-t}}\right) = \frac{\gamma e^{-t}}{1 + \gamma e^{-t}} = \frac{\gamma e^{-t}(1 - \gamma e^{-t})}{1 - \gamma^2 e^{-2t}} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}}(\gamma - e^{-t})$$

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, pour tout $j \in [|1,n|]$, on a :

$$\begin{aligned}
D_j Q_t f(x) &= \frac{Q_t f(x) - Q_t f(x_1, \cdots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)}{2} \\
&= \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \xi_i e^{-t}}{2}\right] \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 - \xi_j e^{-t}}{1 + \xi_j e^{-t}}\right) f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \xi_i e^{-t}}{2}\right] \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}}(\xi_j - e^{-t}) f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \xi_i e^{-t}}{2}\right] \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^{2t} - 1}} \mathbb{E}[\delta_j(t) f(x_1\xi_1(t), \cdots, x_n\xi_n(t))].
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $Q_t f = P_t f$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Q_t f(x) &= \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left(\sum_{j=1}^n \frac{-\xi_j e^{-t}}{2} \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1+\xi_i e^{-t}}{2} \right] \right) f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= -\sum_{j=1}^n \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \frac{\xi_j e^{-t}}{1+\xi_j e^{-t}} \left[\prod_{i=1}^n \frac{1+\xi_i e^{-t}}{2} \right] f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= -\sum_{j=1}^n \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \left[\prod_{i=1}^n \frac{1+\xi_i e^{-t}}{2} \right] \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-\xi_j e^{-t}}{1+\xi_j e^{-t}} \right) f(x_1\xi_1, \cdots, x_n\xi_n) \\
&= -\sum_{j=1}^n D_j Q_t f(x) = \Delta Q_t f(x)
\end{aligned}$$

donc la fonction $\psi : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-t\Delta} Q_t f$ est constante égale à $\psi(0) = f$ d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $Q_t f = e^{t\Delta} f = P_t f$. □

A.2 Les types de Rademacher et d'Enflo coïncident

Avant d'arriver au résultat désiré, montrons un dernier théorème.

Théorème 32. *Soit $f : \{-1,1\}^n \to X$, $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. On a :*

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\right)\right] \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right)\right] d\mu(t)$$

où μ désigne la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ ayant pour densité la fonction :

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{e^{2t} - 1}}.$$

Démonstration. D'après la proposition 27, on a :

$$\forall x \in X, \phi(x) = \sup_{z \in X^*} \{\langle z, x \rangle - \phi^*(z)\} \quad (*)$$

donc :

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{z \in X^*} \{\langle z, f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(z)\}\right].$$

• Montrons que :

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\right)\right] = \sup_{g : \{-1,1\}^n \to X} \{\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(g(\varepsilon))\right]\}$$

L'inégalité $\sup_{g : \{-1,1\}^n \to X} \{\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(g(\varepsilon))\right]\} \leq \mathbb{E}\left[\sup_{z \in X^*} \{\langle z, f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(z)\}\right]$ est immédiate.
De plus, pour tout $\eta > 0$, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, il existe $g(x) \in X^*$ tel que :

$$\langle g(x), f(x) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(g(x)) \geq \sup_{z \in X^*} \{\langle z, f(x) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) \rangle - \phi^*(z)\} - \eta$$

donc, pour tout $\eta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\sup_{g:\{-1,1\}^n\to X} \{\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle - \phi^*(g(\varepsilon))\right]\} \\
&= \frac{1}{2^n} \sup_{h:\{-1,1\}^n\to X} \left\{ \sum_{x\in\{-1,1\}^n} \left(\langle h(x), f(x)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle - \phi^*(h(x))\right) \right\} \\
&\geq \frac{1}{2^n} \sum_{x\in\{-1,1\}^n} \left(\sup_{z\in X^*} \{\langle z, f(x)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle - \phi^*(z)\} - \eta \right) \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{z\in X^*} \{\langle z, f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle - \phi^*(z)\} \right] - \eta
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.
Fixons $g : \{-1,1\}^n \to X^*$. Comme $P_0 f = f$ et que, d'après le lemme 15, $\lim_{t\to\infty} P_t f \equiv \mathbb{E}(f(\varepsilon))$ car $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \varepsilon$ en loi, le théorème fondamental du calcul intégral assure que :

$$\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle\right] = -\mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon), \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} P_t f(\varepsilon) dt \right\rangle\right].$$

Comme, pour tout $x \in \{-1,1\}^n$, $g(x)$ est continue, par définition de l'intégrale de Bochner, on a :

$$\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle\right] = -\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left\langle g(\varepsilon), \frac{d}{dt} P_t f(\varepsilon)\right\rangle dt\right] = -\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon), \frac{d}{dt} P_t f(\varepsilon)\right\rangle\right] dt$$

la dernière égalité venant du fait que l'espérance est une somme finie.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle\right] &= -\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), \Delta P_t f(\varepsilon)\rangle\right] dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon), P_t \Delta f(\varepsilon)\rangle\right] dt \text{ car } P_t\Delta = \Delta P_t \\
&= -\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\langle P_t g(\varepsilon), \Delta f(\varepsilon)\rangle\right] dt \text{ par la remarque 27} \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\langle D_j P_t g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle\right] dt \text{ par le lemme 14.}
\end{aligned}$$

• Soit $t \in \mathbb{R}^+$. D'après le lemme 15, si on note $\varepsilon\xi(t) = (\varepsilon_1\xi_1(t), \cdots, \varepsilon_n\xi_n(t))$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\langle D_j P_t g(\varepsilon), D_j f(\varepsilon)\rangle\right] &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\varepsilon \left[\left\langle \frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}} \mathbb{E}_{\xi(t)}[\delta_j(t) g(\varepsilon\xi(t))], D_j f(\varepsilon)\right\rangle\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\langle g(\varepsilon\xi(t)), \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\rangle\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^{2t}-1}} \mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon\xi(t)), \sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\rangle\right]
\end{aligned}$$

• Notons que les vecteurs aléatoires $\varepsilon\xi(t)$ et ε suivent la même loi.
En effet, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \{-1,1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\varepsilon\xi(t) = x) &= \sum_{y \in \{-1,1\}^n} \mathbb{P}\left(\varepsilon = \left(\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right) \mid \xi(t) = y\right) \mathbb{P}(\xi(t) = y) \\
&\overset{\perp}{=} \sum_{y \in \{-1,1\}^n} \mathbb{P}\left(\varepsilon = \left(\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right)\right) \mathbb{P}(\xi(t) = y) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{y \in \{-1,1\}^n} \mathbb{P}(\xi(t) = y) = \frac{1}{2^n} \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon = x)
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}[\phi^*(g(\varepsilon))] = \mathbb{E}[\phi^*(g(\varepsilon\xi(t)))]$.
• On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle] - \mathbb{E}[\phi^*(g(\varepsilon))] \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon\xi(t)), \sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\rangle\right] d\mu(t) - \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\phi^*(g(\varepsilon\xi(t)))] d\mu(t) \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon\xi(t)), \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\rangle - \phi^*(g(\varepsilon\xi(t)))\right] d\mu(t) \\
&\overset{(*)}{\leq} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right)\right] d\mu(t)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Nous pouvons désormais montrer que les deux types introduits coïncident.

Théorème 33. *Soit X un espace de Banach, $p \in [1,2]$. On a :*

$$T_p^R(X) \leq T_p^E(X) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} T_p^R(X).$$

Démonstration. • Montrons que $T_p^R(X) \leq T_p^E(X)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n)$. On pose $f : \begin{cases} \{-1,1\}^n & \to \ X \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) & \mapsto \ \sum\limits_{j=1}^n \gamma_j x_i \end{cases}$. On a :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right\|^p\right) = \mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) \leq \left(T_p^E(X)\right)^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\|D_j f(\varepsilon)\|^p\right) = \left(T_p^E(X)\right)^p \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p$$

donc $T_p^R(X) \leq T_p^E(X)$.
• Montrons désormais que $T_p^E(X) \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} T_p^R(X)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \{-1,1\}^n \to X$.
$*$ Comme ε et $-\varepsilon$ ont la même distribution et que $\|.\|^p$ est convexe, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) &= \mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon)) - [f(-\varepsilon) - \mathbb{E}(f(-\varepsilon))]}{2}\right\|^p\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\|f(-\varepsilon) - \mathbb{E}(f(-\varepsilon))\|^p\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p\right)
\end{aligned}$$

Le théorème 32 avec la fonction convexe semi-continue inférieurement $\phi = \|.\|^p$ donne :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon)-f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) \leq \mathbb{E}\left(\|f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p\right) \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\|\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right] d\mu(t).$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Pour estimer $\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right]$, utilisons un argument de symétrisation. Introduisons $\xi'(t)$, copie indépendante de $\xi(t)$ et ε', copie indépendante de ε.
$*$ Montrons que :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right).$$

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \{-1,1\}^n$.
D'après l'inégalité de Jensen, comme $\|.\|^p$ est convexe, que la composée d'une fonction affine et d'une fonction convexe est une fonction convexe et que les composantes de $\xi'(t)$ sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p = \left\|\frac{\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_1(t))}} D_1 f(\varepsilon) + \sum_{j=2}^n \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p \\
&\leq \mathbb{E}_{\xi_1(t)}\left(\left\|\frac{\xi_1 - \xi_1'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_1(t))}} D_1 f(\varepsilon) + \sum_{j=2}^n \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&= \mathbb{E}_{\xi_1(t)}\left(\left\|\frac{\xi_1 - \xi_1'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_1(t))}} D_1 f(\varepsilon) + \frac{\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_2(t))}} D_2 f(\varepsilon) + \sum_{j=3}^n \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&\leq \mathbb{E}_{(\xi_1(t),\xi_2(t))}\left(\left\|\frac{\xi_1 - \xi_1'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_1(t))}} D_1 f(\varepsilon) + \frac{\xi_2 - \xi_2'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_2(t))}} D_2 f(\varepsilon) + \sum_{j=3}^n \frac{\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j'(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&\leq \cdots \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t) - \xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right).$$

$*$ Comme, par symétrie, $\xi(t) - \xi'(t)$ et $(\varepsilon_j'(\xi_j(t) - \xi_j'(t)))_{j=1}^n$ ont même loi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) &= \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j' \frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&\overset{\perp}{=} \mathbb{E}_{\varepsilon,\xi(t),\xi'(t)} \mathbb{E}_{\varepsilon'}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j' \frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&\leq T_p^R(X)^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\left\|\frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \\
&\overset{\perp}{=} T_p^R(X)^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\left|\frac{\xi_j(t)-\xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}}\right|^p\right) \mathbb{E}(\|D_j f(\varepsilon)\|^p).
\end{aligned}$$

$*$ Or $1 \leq p \leq 2$ donc, d'après l'inégalité de Jensen, pour tout $j \in [|1,n|]$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\xi_j(t)-\xi'_j(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}}\right|^p\right) = -\mathbb{E}\left(-\left|\frac{(\xi_j(t)-\xi'_j(t))^2}{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}\right|^{\frac{p}{2}}\right) \leq \left(\frac{\mathbb{E}((\xi_j(t)-\xi'_j(t))^2)}{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}\right)^{\frac{p}{2}} = 2^{\frac{p}{2}}$$

puisque $\xi'_j(t)$ est une copie indépendante de $\xi_j(t)$.
On a donc montré que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon)-f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\pi^p}{2^p} T_p^R(X)^p 2^{\frac{p}{2}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\|D_j f(\varepsilon)\|^p) d\mu(t) \\ &= \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} T_p^R(X)\right)^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\|D_j f(\varepsilon)\|^p)\end{aligned}$$

D'où $T_p^E(X) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} T_p^R(X)$. □

A.3 Inégalité de Pisier

La preuve du théorème 33 aurait été immédiate si une inégalité de Pisier avait été vraie avec une constante indépendante de la dimension n. L'inégalité est la suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $p \in [1,+\infty[$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall f : \{-1,1\}^n \to X, \mathbb{E}(\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(\varepsilon)\|^p) \leq C^p \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right) \qquad (*)$$

où ε et δ sont des vecteurs indépendants, de loi uniforme sur $\{-1,1\}^n$.
En effet, si cette constante avait été indépendante de n, au moins pour tout espace X de type p-Rademacher ($p \in [1,2]$), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute $f : \{-1,1\}^n \to X$, on aurait eu :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left\|\frac{f(\varepsilon)-f(-\varepsilon)}{2}\right\|^p\right) &\leq \mathbb{E}(\|f(\varepsilon)-\mathbb{E}(\varepsilon)\|^p) \leq C^p \mathbb{E}_\varepsilon\left[\mathbb{E}_\delta\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)\right] \\ &\leq C^p \mathbb{E}_\varepsilon\left[T_p^R(X)^p \sum_{j=1}^n \|D_j f(\varepsilon)\|^p\right] = (C T_p^R(X))^p \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\|D_j f(\varepsilon)\|^p)\end{aligned}$$

Le deuxième résultat principal de l'article est le suivant :

Théorème 34. *Pour tout espace de Banach X et pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'inégalité de Pisier $(*)$ est vraie avec une constante indépendante de la dimension n si et seulement si X est de cotype fini.*

Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin du résultat de dualité suivant :

Proposition 28. *Soit $p \in]1,+\infty]$, q son exposant conjugué, $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $(S, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.*
L'application $J : \left\{\begin{array}{lll} L_q(S;X^*) & \to & L_p(S;X)^* \\ g & \mapsto & J_g : \left\{\begin{array}{lll} L_p(S;X) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_S \langle g(s), f(s)\rangle d\mu(s)\end{array}\right.\end{array}\right.$ *est une isométrie linéaire.*

Démonstration. Soit $g \in L_q(S;X^*)$ telle que $\|g\|_{L_q(S;X^*)} = 1$.
• Commençons par montrer que J est bien définie. On note que, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\forall f \in L_p(S;X), \int_S |\langle g(s), f(s)\rangle| d\mu(s) \leq \int_S \|g(s)\|_{X^*}\|f(s)\| d\mu(s) \leq \|g\|_{L_q(S;X^*)}\|f\|_{L_p(S;X)}$$

donc, comme J_g est linéaire, $J_g \in L_p(S;X)^*$ et $\|J_g\|_{L_p(S;X)^*} \leq \|g\|_{L_q(S;X^*)}$.
• Comme J est linéaire, il suffit de montrer que $\|J_g\|_{L_p(S;X)^*} \geq 1$.
Par définition, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = g$ dans $L_q(S;X^*)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in \left]0, \frac{\varepsilon}{2}\right[$ tel que $(1-\eta)^2 \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
Montrons que $\|J_g\|_{L_p(S;X)^*} \geq 1 - \varepsilon$.
Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|g - g_n\|_{L_q(S;X^*)} \leq \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$\|J_g\|_{L_p(S;X)^*} \geq \|J_{g_n}\|_{L_p(S;X)^*} - \|J_{g-g_n}\|_{L_p(S;X)^*} \geq \|J_{g_n}\|_{L_p(S;X)^*} - \|g-g_n\|_{L_q(S;X^*)} \geq \|J_{g_n}\|_{L_p(S;X)^*} - \frac{\varepsilon}{2}$$

donc il suffit de montrer que $\|J_{g_n}\|_{L_p(S;X)^*} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme g_n est une fonction étagée, que l'on peut supposer non nulle quitte à réduire ε, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $x_1^*, \cdots, x_N^* \in X^* \setminus \{0\}$, $A_1, \cdots, A_N \in \mathscr{A}$ deux à deux disjoints vérifiant, pour tout $k \in [|1, N|]$, $0 < \mu(A_k) < +\infty$, tels que $g_n = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k^* \mathbb{1}_{A_k}$.
Pour tout $k \in [|1, N|]$, il existe $x_k \in S_X$ tel que $\langle x_k^*, x_k\rangle \geq (1-\eta)\|x_k\|_{X^*}$.
$*$ Cas $1 < p < +\infty$:
Posons $f = \sum\limits_{k=1}^{N} \|x_k^*\|_{X^*}^{q-1} x_k \mathbb{1}_{A_k}$. On a :

$$\|f\|_{L_p(S;X)}^p = \sum_{k=1}^{N} \|x_k^*\|_{X^*}^{p(q-1)} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{N} \|x_k^*\|_{X^*}^{q} \mu(A_k) = \|g_n\|_{L_q(S;X^*)}^q \neq 0$$

et, comme les A_k, $k \in [|1, N|]$ sont deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned} J_{g_n}(f) &= \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)\|x_k^*\|_{X^*}^{q-1}\langle x_k^*, x_k\rangle \geq \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)\|x_k^*\|_{X^*}^{q}(1-\eta) \\ &\geq (1-\eta)\|g_n\|_{L_q(S;X^*)}^q \geq (1-\eta)\|g\|_{L_q(S;X^*)}^{q-1}(\|g\|_{L_q(S;X^*)} - \|g-g_n\|_{L_q(S;X^*)}) \\ &\geq (1-\eta)^2 \|f\|_{L_p(S;X)} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|f\|_{L_p(S;X)} \end{aligned}$$

d'où le résultat.
$*$ Cas $p = +\infty$:
Posons $f = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \mathbb{1}_{A_k}$. Comme les A_k, $k \in [|1, N|]$, sont deux à deux disjoints, on a :

$$\|f\|_{L_\infty(S;X)} = \max_{1\leq k\leq N} \|x_k\| = 1$$

et :

$$\begin{aligned} J_{g_n}(f) &= \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)\langle x_k^*, x_k\rangle \geq (1-\eta)\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k)\|x_k\|_{X^*} \\ &= (1-\eta)\|g_n\|_{L_1(S;X^*)} \geq (1-\eta)^2 \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 28. *Si $p \in [1,+\infty[$ et que S est fini de cardinal $N \in \mathbb{N}^*$, on note que :*

$$L_q(S;X^*) \equiv \ell_q^N(X^*) \equiv \ell_p^N(X)^* \equiv L_p(S;X)^*.$$

De même, si S est dénombrable, on a $L_q(S;X^*) \equiv L_p(S;X)^*$.

Le théorème suivant est une amélioration du théorème 32 dans le cas où $\phi = \|.\|^p$.

Théorème 35. *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, pour toute $f : \{-1,1\}^n \to X$, on a :*

$$(\mathbb{E}[\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p])^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(t).$$

Démonstration. Soit $p \in [1,+\infty[$, $f : \{-1,1\}^n \to X$. Notons $q \in]1,+\infty]$ l'exposant conjugué de p.
D'après la proposition 28, on a :

$$(\mathbb{E}[\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p])^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\mathbb{E}[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle], g : \{-1,1\}^n \to X^*, \|g\|_{L_q(\{-1,1\}^n;X^*)} \leq 1\right\}.$$

En reprenant la preuve du théorème 32, pour toute fonction $g : \{-1,1\}^n \to X^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\langle g(\varepsilon\xi(t)), \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\rangle\right] d\mu(t)\\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\|g(\varepsilon\xi(t))\|_{X^*}\left\|\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|\right] d\mu(t).\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, ε et $\varepsilon\xi(t)$ ont la même loi donc, d'après l'inégalité de Hölder, pour toute fonction $g : \{-1,1\}^n \to X$ vérifiant $\|g\|_{L_q(\{-1,1\}^n;X^*)} \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle g(\varepsilon), f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\rangle] &\leq \int_0^{+\infty} \|g\|_{L_q(\{-1,1\}^n;X^*)}\mathbb{E}\left[\left\|\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}} d\mu(t)\\ &\leq \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right]^{\frac{1}{p}} d\mu(t)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 30. *On dit qu'une variable aléatoire réelle ξ est symétrique si ξ et $-\xi$ suivent la même loi.*

Mentionnons les résultat suivant, donc on pourra trouver une preuve respectivement aux pages 79 et 21 de [13] :

Théorème 36. *Soit $S, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $q \in [2,+\infty[$, $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité sur lequel est définie $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Supposons X de cotype q.*
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour toutes $f_1, \cdots, f_N \in L^q(S)$, pour tout $(x_1, \cdots, x_N) \in X^N$, on a :

$$\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n f_n x_n\right\|_{L^q(S\times\Omega;X)} \leq C_q(X) q^{\frac{1}{q}} \int_0^{+\infty} \max_{1\leq n\leq N} \mu(|f_n| > t)^{\frac{1}{q}} dt \cdot \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 37 (Inégalité de Kahane-Khintchine)**.** *Soit* $0 < p < q < +\infty$.
Il existe $\kappa_{q,p} \in \mathbb{R}^+$ *telle que, pour tout espace de Banach* X*, pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$*, pour tout* $(x_1, \cdots, x_N) \in X^N$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \kappa_{q,p} \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, si $1 < p < q < +\infty$*, on a :*

$$\kappa_{q,p} \leq \sqrt{\frac{q-1}{p-1}}.$$

Grâce à ces deux théorèmes, on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 38. *Soit* $q \in [2, +\infty[$*. Supposons* X *de cotype* q*. Soit* $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une famille de variables aléatoires réelles symétriques indépendantes et identiquement distribuées, indépendante de* ε*.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, pour tout* $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$*, pour tout* $p \in [1, +\infty[$*, on a :*

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq L_{q,p} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|\eta_1| > t)^{\frac{1}{\max(p,q)}} dt \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

où $L_{q,p} = LC_q(X) \max\left(1, \sqrt{\frac{q}{p}}\right)$*, avec* L *une constante universelle.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$, $p \in [1, +\infty[$.
Commençons par voir que, pour tout $j \in [|1, n|]$, η_j et $\varepsilon_j \eta_j$ suivent la même loi En effet, pour tout $j \in [|, n|]$, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j \eta_j \in B) \stackrel{\perp}{=} \mathbb{E}_{\varepsilon_j}[\mathbb{E}_{\eta_j}(\mathbb{1}_{\varepsilon_j \eta_j \in B})] = \mathbb{E}_{\varepsilon_j}[\mathbb{E}_{\eta_j}(\mathbb{1}_{\eta_j \in B})] = \mathbb{P}(\eta_j \in B)$$

Raisonnons ensuite par distinction de cas.
• Cas $p = q$:
D'après le théorème 36, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \eta_j x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C_q(X) q^{\frac{1}{q}} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|\eta_1| > t)^{\frac{1}{q}} dt \cdot \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq e^{\frac{\ln(2)}{2}} C_q(X) \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|\eta_1| > t)^{\frac{1}{\max(q,p)}} dt \cdot \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

car la fonction $x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ atteint son maximum en $x = 2$.
• Cas $p > q$:

D'après le lemme 13, X est de cotype p et $C_p(X) \leq C_q(X)$ donc, d'après le théorème 36, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\eta_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p(X)p^{\frac{1}{p}}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(|\eta_1|>t)^{\frac{1}{p}}dt\cdot\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq e^{\frac{\ln(2)}{2}}C_q(X)\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(|\eta_1|>t)^{\frac{1}{\max(q,p)}}dt\cdot\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

• Cas $p < q$:
Notons tout d'abord que, d'après le théorème 36, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j x_j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_j x_j\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq e^{\frac{\ln(2)}{2}}C_q(X)\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(|\eta_1|>t)^{\frac{1}{\max(p,q)}}dt\cdot\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Or : $*$ si $2 \leq p$, comme on a :

$$\frac{\sqrt{\frac{q-1}{p-1}}}{\sqrt{\frac{q}{p}}} = \sqrt{\frac{p}{p-1}}\sqrt{\frac{q-1}{q}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{p-1}} \leq \sqrt{2}$$

le théorème 37 assure que :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sqrt{\frac{q-1}{p-1}}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

$*$ si $q \leq 2$, d'après le théorème 37, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \kappa_{2,1}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|\right) \\
&\leq \kappa_{2,1}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \kappa_{2,1}\sqrt{\frac{q}{p}}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}};
\end{aligned}$$

$*$ si $p < 2 < q$, toujours d'après le théorème 37, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \kappa_{q,2}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \kappa_{q,2}\kappa_{2,1}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sqrt{2}\kappa_{2,1}\sqrt{q-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sqrt{2}\kappa_{2,1}\sqrt{\frac{q}{p}}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{n}\varepsilon_n x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat avec $L = \sqrt{2}e^{\frac{\ln(2)}{2}}\max(1,\kappa_{2,1})$. □

On peut alors prouver le sens réciproque du théorème 34 :

Proposition 29. *Soit $q \in [2,+\infty[$. Supposons X de cotype q. Soit $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires de loi de Rademacher.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f : \{-1,1\}^n$, pour tout $1 \leq p < +\infty$, on a :

$$\mathbb{E}[\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p] \leq K_{q,p}^p \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)$$

où $K_{q,p} = KC_q(X)p\max\left(1, \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$, avec K une constante universelle.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, notons $\xi'(t)$ une copie indépendante de $\xi(t)$.
• Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Notons que, pour tout $r \in [1,+\infty[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|\xi_1'(t) - \xi_1(t)| > s)^{\frac{1}{r}} ds = \int_0^2 \mathbb{P}\left(1 - \frac{s^2}{2} > \xi_1(t)\xi_1'(t)\right)^{\frac{1}{r}} ds$$
$$= \int_0^2 \left(\mathbb{P}\left(1 - \frac{s^2}{2} > \xi_1(t)\right)\mathbb{P}(\xi_1'(t) = 1) + \mathbb{P}\left(\xi_1(t) > \frac{s^2}{2} - 1\right)\mathbb{P}(\xi_1'(t) = -1)\right)^{\frac{1}{r}} ds$$
$$= \int_0^2 (2\mathbb{P}(\xi_1(t) = 1)\mathbb{P}(\xi_1(t) = -1))^{\frac{1}{r}}\, ds = 2^{1-\frac{1}{r}}(1 - e^{-2t})^{\frac{1}{r}}.$$

Or, on a vu dans la preuve du théorème 33 que, d'après l'inégalité de Jensen, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t) - \xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\left(\mathbb{E}_\varepsilon\left[\mathbb{E}_{\xi(t)}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t) - \xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On déduit alors du théorème 38 que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t) D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\left(\mathbb{E}_\varepsilon\left[\mathbb{E}_{\xi(t)}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j(t) - \xi_j'(t)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_j(t))}} D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t}}}\left(\mathbb{E}_\varepsilon\left[L_{q,p}^p\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|\xi_1(t) - \xi_1'(t)| > s)^{\frac{1}{\max(p,q)}} ds\right)^p \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2^{1-\frac{1}{\max(q,p)}} L_{q,p}(1 - e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)} - \frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq 2L_{q,p}(1 - e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)} - \frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• Observons désormais que :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}(1-e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)}-\frac{1}{2}}d\mu(t) &= \int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)}}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)}-1}dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{\frac{1}{\max(q,p)}-1}dt \text{ car } \max(p,q)>1 \\
&\overset{u=1-e^{-t}}{=} \int_0^{1} u^{\frac{1}{\max(q,p)}-1}du = \max(q,p).
\end{aligned}$$

• On déduit donc du théorème 35 que :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}[\|f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p])^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j(t)D_jf(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}d\mu(t) \\
&\leq 2L_{q,p}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_jD_jf(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}(1-e^{-2t})^{\frac{1}{\max(q,p)}-\frac{1}{2}}d\mu(t) \\
&\leq 2L_{q,p}\max(q,p)\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_jD_jf(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K_{q,p}\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_jD_jf(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

avec $K=2L$, ce qui assure le résultat. □

La proposition suivante prouve, quant à elle, le sens direct.

Proposition 30. *Si X n'admet pas de cotype fini, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $p\in[1,+\infty[$, il existe une fonction $f:\{-1,1\}^N\to X$ vérifiant :*

$$\mathbb{E}(\|f(\varepsilon)-\mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p)\geq C_{n,p}^p\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_jD_jf(\varepsilon)\right\|^p\right)$$

où $C_{n,p}=C\ln\left(\frac{n}{9p}\right)$, avec C une constante universelle.

Démonstration. • D'après un résultat de Talagrand (cf [28]), pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $p\in[1,+\infty[$, il existe une fonction $g:\{-1,1\}^N\to\ell_\infty^{2^n}$ vérifiant :

$$\mathbb{E}(\|g(\varepsilon)-\mathbb{E}(g(\varepsilon))\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}}\geq c\ln\left(\frac{n}{9p}\right)\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_jD_jg(\varepsilon)\right\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec c une constante universelle.
• D'après le théorème de Maurey-Pisier (cf [24]), comme X d'admet pas de cotype fini, l'espace

ℓ_∞ est finiment représentable dans X donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $T : \ell_\infty^N \to X$ linéaire vérifiant :

$$\forall x \in \ell_\infty^N, \|x\|_\infty \leq \|Tx\| \leq 2\|x\|_\infty.$$

• Considérons désormais $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty[$. On pose $C = \frac{c}{2}$, constante universelle. Notons g la fonction donnée par le résultat de Talagrand et T l'application linéaire donnée par le théorème de Maurey-Pisier avec $N = 2^n$.
Comme T est linéaire, l'application $f = T \circ g : \{-1, 1\}^n \to X$ vérifie alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|f(\varepsilon) - \mathbb{E}(f(\varepsilon))\|^p)^{\frac{1}{p}} &= \mathbb{E}(\|T[g(\varepsilon) - \mathbb{E}(g(\varepsilon))]\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \mathbb{E}[\|g(\varepsilon) - \mathbb{E}(g(\varepsilon))\|_\infty^p]^{\frac{1}{p}} \\
&\geq c \ln\left(\frac{n}{9p}\right) \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j g(\varepsilon)\right\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq C \ln\left(\frac{n}{9p}\right) \mathbb{E}\left(\left\|T\left(\sum_{j=1}^n \delta_j D_j g(\varepsilon)\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \ln\left(\frac{n}{9p}\right) \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \delta_j D_j f(\varepsilon)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. $\square$

Références

[1] F Albiac and NJ Kalton. Topics in banach space theory, 2nd revised and updated edition. *Graduate Texts in Mathematics*, 233, 2016.

[2] B Beauzamy. Introduction to banach spaces and their geometry (1985). *North-Holland Mathematics Studies*, 68.

[3] Bernard Beauzamy, Jean-Thierry Lapresté, et al. *Modeles étalés des espaces de Banach.* Hermann Paris, 1984.

[4] Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss. *Geometric nonlinear functional analysis*, volume 48. American Mathematical Soc., 1998.

[5] Jonathan M Borwein, Jon D Vanderwerff, et al. *Convex functions : constructions, characterizations and counterexamples*, volume 109. Cambridge University Press Cambridge, 2010.

[6] Aude Dalet and Gilles Lancien. Some properties of coarse lipschitz maps between banach spaces. *North-W. Eur. J. of Math.*, 3 :39–60, 2017.

[7] I Edelstein and P Wojtaszczyk. On projections and unconditional bases in direct sums of banach spaces. *Studia Mathematica*, 3(56) :263–276, 1976.

[8] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos, and Václav Zizler. *Banach space theory : the basis for linear and nonlinear analysis.* Springer Science & Business Media, 2011.

[9] Gilles Godefroy and Nigel J Kalton. Lipschitz-free banach spaces. *Studia Mathematica*, 159 :121–141, 2003.

[10] Gilles Godefroy, Gilles Lancien, and Vaclav Zizler. The non-linear geometry of banach spaces after nigel kalton. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 44(5) :1529–1584, 2014.

[11] Stefan Heinrich. Ultraproducts in banach space theory. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1980(313) :72–104, 1980.

[12] Tuomas Hytönen, Jan Van Neerven, Mark Veraar, and Lutz Weis. *Analysis in Banach spaces*, volume 12. Springer, 2016.

[13] Tuomas Hytönen, Jan Van Neerven, Mark Veraar, and Lutz Weis. *Analysis in Banach Spaces : Volume II : Probabilistic Methods and Operator Theory*, volume 67. Springer, 2018.

[14] Paata Ivanisvili, Ramon van Handel, and A. Volberg. Rademacher type and enflo type coincide. 2020.

[15] William B Johnson and Joram Lindenstrauss. *Handbook of the geometry of Banach spaces.* Elsevier, 2001.

[16] William B Johnson, Joram Lindenstrauss, David Preiss, and Gideon Schechtman. Almost fréchet differentiability of lipschitz mappings between infinite-dimensional banach spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 84(3) :711–746, 2002.

[17] N Kalton. Uniform homeomorphisms of banach spaces and asymptotic structure. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(2) :1051–1079, 2013.

[18] Nigel J Kalton. Spaces of compact operators. *Mathematische Annalen*, 208(4) :267–278, 1974.

[19] Nigel J Kalton et al. m-ideals of compact operators. *Illinois Journal of Mathematics*, 37(1) :147–169, 1993.

[20] Nigel J Kalton and N Lovasoa Randrianarivony. The coarse lipschitz geometry of $\ell_p \oplus \ell_q$. *Math. Ann*, 341(1) :223–237, 2008.

[21] Nigel J Kalton and Dirk Werner. Property (m), m-ideals, and almost isometric structure of banach spaces. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 461 :137–178, 1995.

[22] Gilles Lancien. A short course on non linear geometry of banach spaces. 2012.

[23] Joram Lindenstrauss and Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces II : function spaces*, volume 97. Springer Science & Business Media, 2013.

[24] Bernard Maurey and Gilles Pisier. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de banach. *Studia Mathematica*, 58(1) :45–90, 1976.

[25] James R Munkres. *Topology ; a First Course [By] James R. Munkres*. Prentice-Hall, 1974.

[26] Jean-Yves Ouvrard. Probabilité tomes 1 et 2. *Edition Cassini*, 1998.

[27] A Pełczyński and H Rosenthal. Localization techniques in l^p spaces. *Studia Mathematica*, 52(3) :265–289, 1975.

[28] Michel Talagrand. Isoperimetry, logarithmic sobolev inequalities on the discrete cube, and margulis' graph connectivity theorem. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 3(3) :295–314, 1993.

[29] Przemyslaw Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts*, volume 25. Cambridge University Press, 1996.

[30] Sheng Zhang. Asymptotic properties of banach spaces and coarse quotient maps. 2017.