

# LA NOTION DE DISTANCE : DE L'INTUITION AUX MATHÉMATIQUES

A. Fovelle

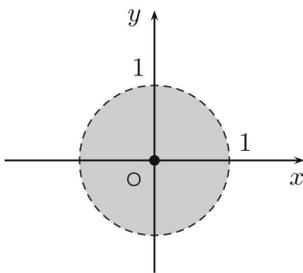


La notion de distance, à savoir la longueur du plus court chemin entre deux lieux, qui nous est familière, est formalisée en mathématiques. Cette formalisation permet de donner un sens à « la distance entre A et B » où A et B sont des objets aussi divers que des fonctions ou des mots.

## DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

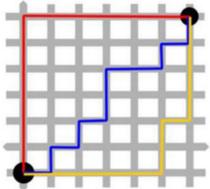
### Distance euclidienne

La distance, parfois appelée « distance à vol d'oiseau », correspond à la distance euclidienne. Avec cette distance, la boule unité de centre O et de rayon 1 est le disque gris.

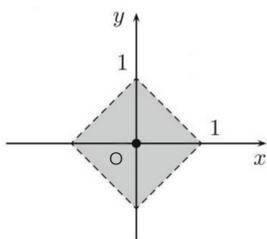


### Distance de Manhattan

Le réseau routier si particulier de la ville de New York est modélisé par deux ensembles de rues parallèles qui s'intersectent à angle droit. La « distance de Manhattan » entre deux points du réseau est égale au nombre de déplacements élémentaires horizontaux ou verticaux permettant de joindre ces deux points (un tel chemin est dessiné en bleu sur le plan de Manhattan), indépendamment du chemin choisi, pourvu que ces déplacements élémentaires se fassent toujours dans le même sens.

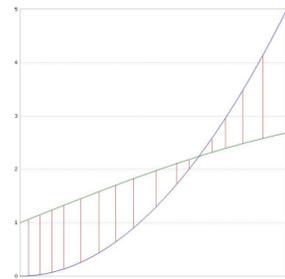
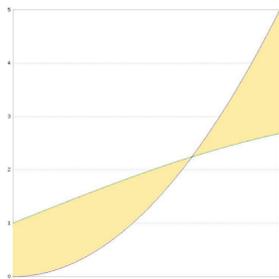


Avec cette distance, l'ensemble des points du plan à moins de 1 unité du point O est le carré gris. La « boule unité » n'est pas ronde !

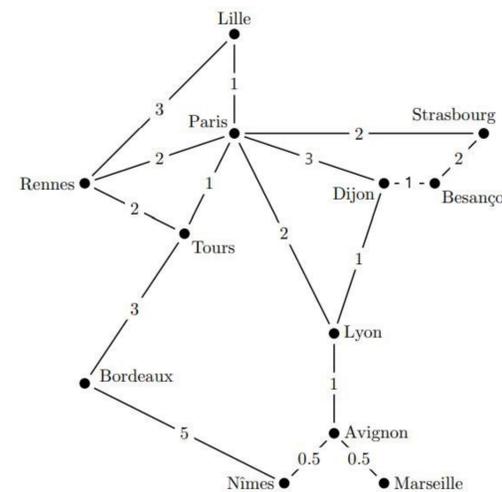


### Distance entre fonctions

Pour définir la distance entre deux fonctions, les mathématiciens ont décidé de mesurer l'aire de la surface comprise entre leurs courbes représentatives (surface jaune ci-contre) ou de mesurer le plus grand écart entre ces fonctions (la mesure du trait rouge le plus long). Essayez d'imaginer les boules de rayon 1 !



### Distance sur un graphe ou « distance SNCF »



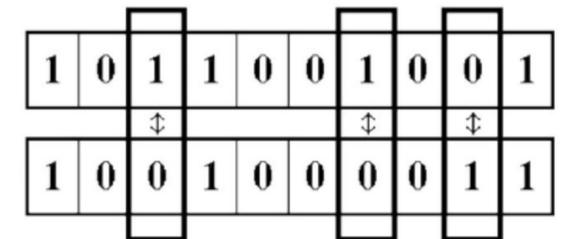
Le réseau SNCF peut se représenter par un graphe. Nous en avons représenté une partie. Un *nœud* du graphe modélise une gare, une *arête* du graphe modélise une ligne de chemin de fer et le *nombre réel* attaché à une *arête* modélise le temps de trajet. Sur un tel graphe, la distance entre la gare A et la gare B est la plus petite somme des temps de trajets reliant A et B.

#### EXEMPLES

- La distance entre Strasbourg et Bordeaux est de 6 heures.
- La distance entre Lille et Marseille est de 4,5 heures.
- La distance entre Rennes et Besançon est de 6 heures.

### Distance de Hamming en informatique

En informatique, les informations sont souvent codées par une suite de 0 et de 1. On utilise ainsi un alphabet de deux lettres, dit binaire. Une lettre est appelée un *bit* et un mot est appelé un *mot* !



La distance de Hamming mesure l'écart entre deux *mots* ayant le même nombre de lettres. Pour la calculer, on compte le nombre de différences lettre à lettre.

#### EXEMPLES

- La distance entre 1 et 0 est de 1 bit.
- La distance entre 101 et 011 est de 2 bits.
- La distance entre 1011001001 et 1001000011 est de 3 bits.
- La distance entre 01010 et 01011 est de 1 bit.

A	01000001	N	01001110
B	01000010	O	01001111
C	01000011	P	01010000
D	01000100	Q	01010001
E	01000101	R	01010010
F	01000110	S	01010011
G	01000111	T	01010100
H	01001000	U	01010101
I	01001001	V	01010110
J	01001010	W	01010111
K	01001011	X	01011000
L	01001100	Y	01011001
M	01001101	Z	01011010