Université de Franche-Comté

Mini-projet de Master 2

Multiplicateurs de Fourier sur le tore et la droite réelle

FOVELLE Audrey

Encadrant : M. NOU Alexandre

Année 2019-2020

Table des matières

Introduction

Les multiplicateurs de Fourier, utilisés par exemple en théorie du signal, sont des opérateurs qui agissent sur une fonction en modifiant sa transformée de Fourier, plus précisément en la multipliant par une fonction spécifique, appelée multiplicateur ou symbole de Fourier.
Certaines applications fréquemment utilisées, comme les translations, sont des exemples simples de multiplicateurs, la transformée de Hilbert et la projection de Riesz fournissant des exemples plus élaborés.
La théorie générale des multiplicateurs de Fourier peut se faire sur des groupes topologiques abéliens localement compacts mais nous nous restreindrons aux cas du tore et de la droite réelle dans ce mémoire.
De nombreuses questions naturelles dans ce domaine restent ouvertes, comme la caractérisation des multiplicateurs de Fourier des espaces L^p, $p \in]1, +\infty[\setminus\{2\}$. Les cas $p = 2$ et $p = 1$, et donc $p = +\infty$ car les multiplicateurs de Fourier de L^p sont les mêmes que ceux de L^q si on note q l'exposant conjugué de p, sont les seuls pour lesquels le problème de la caractérisation est résolu, le cas $p = 2$ étant le plus simple car toute fonction mesurable bornée s'avère être un multiplicateur de Fourier de L^2.

Ce mémoire est découpé en deux parties. La première est consacrée à l'étude des multiplicateurs de Fourier sur le tore, la deuxième à l'étude de ces mêmes multiplicateurs sur la droite réelle.
Nous donnerons en particulier une caractérisation des opérateurs de L^p commutant avec les translations et nous expliciterons les multiplicateurs de Fourier de L^1 (et L^∞) et L^2.

Plus précisément, dans la première partie, après avoir introduit le vocabulaire et donné quelques résultats principaux concernant les multiplicateurs de Fourier du tore, nous nous intéresserons à deux multiplicateurs importants, la transformée de Hilbert et la projection de Riesz. Pour cela, nous démontrerons deux théorèmes d'interpolation, les théorèmes de Riesz-Thorin et de Marcinkiewicz. L'étude de ces multiplicateurs nous permettra d'en savoir plus sur les espaces $L^p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, ainsi que sur la convergence des séries de Fourier dans ces mêmes espaces.

Le début de la deuxième partie sera consacré à la preuve de quelques résultats généraux concernant les multiplicateurs de Fourier sur la droite réelle. Nous montrerons ensuite deux théorèmes donnant une condition suffisante pour que des opérateurs soient des multiplicateurs de Fourier : le théorème de Mikhlin et le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz. Pour cela, nous aurons besoin des théories de Calderón-Zygmund et de Littlewood-Paley. Nous montrerons également que la transformée de Hilbert est un multiplicateur de Fourier de $L^p(\mathbb{R})$, lorsque $p \in]1, +\infty[$.

1 Multiplicateurs de Fourier sur le tore

1.1 Définitions et premières propriétés

Avant d'énoncer les premiers résultats, introduisons quelques notations et définissons les multiplicateurs de Fourier sur le tore.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on considère $L^p(\mathbb{T})$ muni de la norme

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f|^p \frac{d\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < \infty \\ \text{Supess}(f) \text{ si } p = +\infty \end{cases} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{int} \end{cases}$. Notons $\mathcal{P} = \text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques, et rappelons que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{T})$, $\overline{\mathcal{P}}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathscr{C}(\mathbb{T})$.
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit $\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$. Notons également $\mathcal{P}_\mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques à valeurs réelles et $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives.
Notons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\begin{cases} L^p(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \widehat{f}(n) \end{cases}$ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{T})$.
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, définissons désormais l'espace de Hardy du tore par :

$$H_p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}); \forall n < 0, \widehat{f}(n) = 0\}$$

qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mathbb{T})$.

Définition 1. *Soit $p \in [1, +\infty[$, $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une application. On pose :*

$$T_m : \begin{cases} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ f & \mapsto & \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(n)\hat{f}(n)e_n \end{cases}$$

et on dit que $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ est un multiplicateur de Fourier (borné) de $L^p(\mathbb{T})$, de symbole m, si T est le prolongement continu de T_m à $L^p(\mathbb{T})$.

Les applications citées ci-dessous, et couramment utilisées en analyse de Fourier, sont des multiplicateurs de Fourier.

Exemples. • *Soit $s \in \mathbb{T}$, $p \in]1, +\infty[$. L'application $\tau_s : \begin{cases} L^p(\mathbb{T}) & \to & L^p(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & f(\cdot - s) \end{cases}$ de translation par s est un multiplicateur de Fourier de symbole $(e^{ins})_{n\in\mathbb{Z}}$;*

• *Soit $N \in \mathbb{N}$. L'application $S_N : \begin{cases} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ f & \mapsto & \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n \end{cases}$ s'étend en un multiplicateur de Fourier de symbole $(\mathbb{1}_{[|-N,N|]}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.*

On note qu'un multiplicateur de Fourier commute avec les translations. Le théorème suivant affirme que la réciproque est vraie.

Théorème 1. *Soit* $(p,q) \in [1,+\infty]$, $T : L^p(\mathbb{T}) \to L^q(\mathbb{T})$ *un opérateur linéaire continu qui commute avec les translations.*
Alors il existe une suite bornée $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *telle que, pour tout* $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ *dont la série de Fourier converge normalement (dans* $L^p(\mathbb{T})$*), pour tout* $x \in \mathbb{T}$*, on ait :*

$$T(f)(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \hat{f}(m) e^{imx}.$$

De plus, on a : $\|(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}\|_\infty \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}$.

Démonstration. Puisque T commute avec les translations, pour tout $h \in \mathbb{T}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour presque-tout $x \in \mathbb{T}$, on a :

$$T(e_m)(x-h) = \tau_h \circ T(e_m)(x) = T(\tau_h(e_m))(x) = e^{-imh} T(e_m)(x).$$

On en déduit, par dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, que, pour tout $h \in \mathbb{T}$, il existe un ensemble mesurable F_h tel que $\lambda(F_h) = 2\pi$ et :

$$\forall x \in F_h, \forall m \in \mathbb{Z}, T(e_m)(x-h) = e^{-imh} T(e_m)(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}$, l'ensemble $\{h \in \mathbb{T}; x \in F_h\}$ est mesurable d'après le théorème de Fubini-Tonelli donc on peut définir $D(x) = \frac{\lambda}{2\pi}(\{h \in \mathbb{T}; x \in F_h\})$.
On note que, pour tout $x \in \mathbb{T}$, $D(x) \leq 1$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} D \frac{d\lambda}{2\pi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{k\in\mathbb{T}; x\in F_k\}}(h) d\lambda(h) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{\{k\in\mathbb{T}; x\in F_k\}}(h) d\lambda(x) d\lambda(h) \text{ par Fubini-Tonelli} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \frac{\lambda}{2\pi}(F_h) \frac{d\lambda}{2\pi}(h) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \frac{d\lambda}{2\pi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $D = \mathbb{1}$ λ-presque-partout d'où l'existence d'un $x_0 \in \mathbb{T}$ tel que $D(x_0) = 1$.
Donc, pour presque-tout $h \in \mathbb{T}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$T(e_m)(x_0 - h) = e^{-imh} T(e_m)(x_0)$$

d'où, pour presque-tout $x \in \mathbb{T}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$T(e_m)(x) = e^{-im(x_0-x)} T(e_m)(x_0) = a_m e^{imx} \text{ où } a_m = e^{-imx_0} T(e_m)(x_0)$$

i.e pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $T(e_m) = a_m e_m$ λ-presque-partout.
On a alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, |a_m| = \|a_m e_m\|_q = \|T(e_m)\|_q \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})} \|e_m\|_p = \|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}$$

d'où $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$ avec $\|(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}\|_\infty \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}$.
De plus, comme pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $T(e_m) = a_m e_m$ λ-presque-partout, pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a $T(f) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} a_m \hat{f}(m) e_m$.
Pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier converge normalement dans $L^p(\mathbb{T})$, par continuité de T, on a donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \hat{f}(n) e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e_n = \lim_{N\to\infty} T(S_N(f)) = T\left(\lim_{N\to\infty} S_N(f)\right) = T(f)$$

toutes les limites étant considérées dans $L^p(\mathbb{T})$. On a donc bien le résultat. □

Une corollaire direct de ce théorème est la proposition suivante, qui justifie qu'on ne considère que des fonctions bornées sur $\mathbb{Z}$ par la suite.

Proposition 1. *Soit $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une application.*
S'il existe $p \in [1, +\infty[$ tel que T_m soit un multiplicateur borné de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même, alors $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un multiplicateur de Fourier borné commute avec les translations. □

Remarque 1. *On pourrait montrer, comme on le fera dans le cas réel, que, si $p \in]1, +\infty[$ et q est son exposant conjugué, les multiplicateurs de $L^p(\mathbb{T})$ sont les mêmes que ceux de $L^q(\mathbb{T})$.*

Bien qu'on ne connaisse pas de caractérisation des multiplicateurs de Fourier dans le cas général, on connait parfaitement ceux de $L^2(\mathbb{T})$, qui sont les plus simples, et ceux de $L^1(\mathbb{T})$. En effet, on a les théorèmes suivants :

Théorème 2. *Soit $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une application.*
T_m est un multiplicateur borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même si et seulement si $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$.

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons que T_m soit un multiplicateur borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même. La proposition 1 assure que $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$.
$\Leftarrow$. Supposons que $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$.
Pour tout $f \in \mathcal{P}$, d'après la formule de Parseval, on a :

$$\|T_m(f)\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |m(n)\hat{f}(n)|^2 \leq \|(m(n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|(m(n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty^2 \|f\|_2^2$$

donc T_m s'étend en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même, encore noté T_m, et $\|T_m\|_{L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T})} \leq \|(m(n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty$. □

Remarque 2. *En reprenant les notations du théorème précédent, la preuve du théorème 1 donne :*

$$\|T_m\|_{L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T})} = \|(m(n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty.$$

On note $(\mathcal{M}_R(\mathbb{T}), \|.\|_{TV})$ l'espace des mesures de Radon sur le tore $\mathbb{T}$ muni de la norme de variation totale. On rappelle que, d'après le théorème de Riesz, l'application suivante :

$$J : \left\{ \begin{array}{lll} (\mathcal{M}_R(\mathbb{T}), \|.\|_{TV}) & \to & C(\mathbb{T}) \\ \mu & \mapsto & (f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f d\mu) \end{array} \right.$$

est une isométrie linéaire surjective.
Commençons par définir les objets suivants :

Définition 2. • *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit :*

$$\hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t).$$

• *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $f * \mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$ la mesure admettant pour densité la fonction définie presque partout par la formule :*

$$h(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) d\mu(t).$$

Avant d'énoncer la caractérisation des multiplicateurs de Fourier bornés de $L^1(\mathbb{T})$, donnons la proposition suivante, sans en donner la preuve :

Proposition 2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$. On a :*
(i) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f * \mu}(n) = \hat{f}(n)\hat{\mu}(n)$;
(ii) si on associe $f * \mu$ à sa fonction de densité : $\|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1 \|\mu\|_{TV}$.

Théorème 3. *Soit $(m(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$.*
$T_m : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ est borné si et seulement si il existe $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $m(n) = \hat{\mu}(n)$.

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons $T_m : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ borné.
Pour tout $r \in [0,1[$, on pose $\varphi(r) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} m(n) e_n \in L^1(\mathbb{T})$ (la série étant absolument convergente dans l'espace de Banach $L^1(\mathbb{T})$).
Pour tout $r \in [0,1[$, notons $P_r = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e_n$ le noyau de Poisson. Pour tout $r \in [0,1[$, la série définissant P_r est absolument convergente dans $L^1(\mathbb{T})$ et T_m est continue donc, pour tout $r \in [0,1[$, on a : $T_m(P_r) = \varphi(r)$. Soit $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,1[^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mu_{r_k} \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$ la mesure de densité de $\varphi(r_k)$ par rapport à la mesure de Haar sur le tore. Pour tout $f \in C(\mathbb{T})$, on a : $\int_{\mathbb{T}} f \varphi(r_k) \frac{d\lambda}{2\pi} = \int_{\mathbb{T}} f d\mu_{r_k}$ avec

$$\|\mu_{r_k}\|_{TV} = \|\varphi(r_k)\|_1 = \|T_m(P_{r_k})\|_1 \leq \|T_m\| \|P_{r_k}\|_1 = \|T_m\|.$$

Or $X = C(\mathbb{T})$ est séparable car $\mathbb{T}$ est compact donc, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ est un compact métrisable, ce qui assure, grâce au théorème de Riesz, qu'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$ et une sous-suite $(r_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall f \in C(\mathbb{T}), \int_{\mathbb{T}} f d\mu_{r_{k_j}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{T}} f d\mu \text{ et } \|\mu\|_{TV} \leq \|T_m\|.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e_{-n} d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} e_{-n} d\mu_{r_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} e_{-n} \varphi(r_{k_j}) \frac{d\lambda}{2\pi} \overset{ACV}{=} \lim_{j\to\infty} r_{k_j}^{|n|} m(n) = m(n).$$

$\Leftarrow$. Supposons qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_R(\mathbb{T})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $m(n) = \hat{\mu}(n)$.
Pour toute $f \in \mathcal{P}$, on a :

$$\|T_m(f)\|_1 = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{\mu}(n) e_n \right\|_1 = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f * \mu}(n) e_n \right\|_1 = \|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1 \|\mu\|_{TV}.$$

donc $T_m : L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ est borné. $\square$

Énonçons désormais un résultat donnant une condition nécessaire et suffisante pour avoir la converge dans $L^p(\mathbb{T})$, $p \in [1, +\infty[$ des séries de Fourier. Pour cela, introduisons les applications suivantes :

Définition 3. *On appelle projection de Riesz l'application :*

$$\mathscr{R} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ f & \mapsto & \sum\limits_{n \geq 0} \hat{f}(n) e_n \end{array} \right. .$$

On appelle transformée de Hilbert l'application :

$$\mathscr{H} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ f & \mapsto & \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} (-i) \operatorname{sgn}(n) \hat{f}(n) e_n \end{array} \right.$$

où on a posé $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Ces deux applications sont liées de la façon suivante :

Lemme 1. *Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathscr{R}(f) & = & \frac{1}{2}(\hat{f}(0)\mathbb{1} + (f + i\mathscr{H}(f))) \\ \mathscr{H}(f) & = & i(f + \hat{f}(0)\mathbb{1} - 2\mathscr{R}(f)) \end{array} \right. .$$

Démonstration. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{R}(f) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n) e_n \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{f}(0)\mathbb{1} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e_n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}(n) e_n \right) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{f}(0)\mathbb{1} + f + i\mathscr{H}(f)) \end{aligned}$$

ce qui prouve la première formule.
La deuxième formule découle de la première. □

Lemme 2. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même ;
(ii) $\mathscr{R}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même ;
(iii) $(e_0, e_{-1}, e_1, \cdots, e_{-n}, e_n, \cdots)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $L^p(\mathbb{T})$;
(iv) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\lim\limits_{N \to \infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$;
(v) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})} \leq C$.

Démonstration. • Le lemme 1 assure l'équivalence entre les points (i) et (ii).
• Montrons que : $(iv) \implies (v)$.
Supposons (iv) vraie. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ est une application linéaire continue, $L^p(\mathbb{T})$ est un Banach et, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, $S_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{N \in \mathbb{N}} \|S_N\| < \infty$, ce qui assure que (iv) implique (v).
• Montrons que : $(v) \implies (iv)$.

Supposons (v) vraie. La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application identité sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$ et, d'après (v), $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est équicontinue donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application identité sur $L^p(\mathbb{T})$, ce qui assure que (v) implique (iv).
• Montrons que : $(ii) \implies (v)$.
Supposons (ii) vraie. On note encore $\mathscr{R}$ le prolongement de la projection de Riesz à $L^p(\mathbb{T})$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Les applications $f \mapsto S_N(f)$ et $\mathscr{R}$ sont continues de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même et, pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a :

$$S_N(f) = e_{-N}\mathscr{R}(fe_N) - e_N\mathscr{R}(fe_{-N})$$

donc, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, par densité de $\mathcal{P}$ dans $L^p(\mathbb{T})$, on a :

$$S_N(f) = e_{-N}\mathscr{R}(fe_N) - e_N\mathscr{R}(fe_{-N}).$$

On en déduit que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned}
\|S_N(f)\|_p &\leq \|e_{-N}\mathscr{R}(fe_N)\|_P + \|e_N\mathscr{R}(fe_{-N})\|_p \\
&= \|\mathscr{R}(fe_N)\|_P + \|\mathscr{R}(fe_{-N})\|_p \\
&\leq \|\mathscr{R}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}\|fe_N\|_p + \|\mathscr{R}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}\|fe_{-N}\|_p \text{ par } (ii) \\
&= 2\|\mathscr{R}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}\|f\|_p
\end{aligned}$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \leq 2\|\mathscr{R}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}$, ce qui assure que (ii) implique (v).
• Montrons que (v) implique (ii).
Supposons (v) vraie. Soit $f \in \mathcal{P}$. On note $N = \deg(f)$. On note que $\mathscr{R}(f) = e_N S_N(fe_{-N})$ donc :

$$\|\mathscr{R}(f)\|_p = \|S_N(fe_{-N})\|_p \leq C\|fe_{-N}\|_p = C\|f\|_p$$

ce qui assure que (ii) est vraie grâce au théorème de prolongement des applications linéaires continues par densité à valeurs dans un Banach. On a donc bien (v) implique (ii).
• Montrons pour finir que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Par définition, $(e_0, e_{-1}, e_1, \cdots, e_{-n}, e_n, \cdots)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $L^p(\mathbb{T})$ si et seulement si, pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$, il existe une unique suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \lambda_0 e_0 - \lambda_1 e_{-1} - \lambda_2 e_1 - \cdots - \lambda_n e_{\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor} \right\|_p = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $\left\{ \begin{array}{lcl} L^p(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \hat{f}(n) \end{array} \right.$ est linéaire continue donc, si, pour $f \in L^p(\mathbb{T})$, une telle suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, on a nécessairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \hat{f}\left(\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor\right)$.
On en déduit que $(e_0, e_{-1}, e_1, \cdots, e_{-n}, e_n, \cdots)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $L^p(\mathbb{T})$ si et seulement si, pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \hat{f}(0)e_0 - \hat{f}(-1)e_{-1} - \hat{f}(1)e_1 - \cdots - \hat{f}\left(\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor\right) e_{\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor} \right\|_p = 0.$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{2N} \hat{f}\left(\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor\right) e_{\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor} = S_N(f)$$

et :

$$\sum_{n=0}^{2N+1} \hat{f}\left(\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor\right) e_{\left\lfloor \frac{(-1)^n n}{2} \right\rfloor} = S_N(f) + \hat{f}(-N-1)e_{-N-1}$$

ce qui assure que le point (*iii*) est équivalent au point (*iv*) grâce au lemme de Riemann-Lebesgue. $\square$

Le lemme 2 suggère que l'on se demande si $\mathscr{R}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même, pour $p \in [1, +\infty[$. La proposition ci-dessous affirme que ce n'est pas le cas si $p = 1$.

Proposition 3. *$\mathscr{R}$ ne peut s'étendre en une application linéaire continue de $L_1(\mathbb{T})$ dans $L_1(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Pour tout $r \in]0, 1[$, $P_r := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e_n \in L_1(\mathbb{T})$ et la série est absolument convergente pour la norme $\|.\|_1$.
Supposons que $\mathscr{R}$ s'étende continûment à $L_1(\mathbb{T})$. On continue d'appeler ce prolongement $\mathscr{R}$.
Soit $r \in]0, 1[$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc elle converge simplement et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \sum_{n<0} r^{|n|} e^{int} + \sum_{n\in\mathbb{N}} r^{|n|} e^{int} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n e^{-int} + \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{int} \\ &= \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} + \frac{1}{1 - re^{it}} \\ &= \frac{re^{-it} - r^2 + 1 - re^{-it}}{(1 - re^{-it})(1 - re^{it})} \\ &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\|P_r\|_1 = \int_0^{2\pi} P_r(t) \frac{dt}{2\pi} = \widehat{P_r}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$$

par convergence normale de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e_n$.
Par continuité de $\mathscr{R}$ sur $L_1(\mathbb{T})$ et convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e_n$ dans $L_1(\mathbb{T})$ ($L_1(\mathbb{T})$ est complet donc la convergence absolue implique la convergence), on a :

$$\mathscr{R}(P_r) = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{R}\left(\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} e_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e_n = \frac{1}{1 - re^{i\cdot}}$$

De plus, comme $\mathscr{R}$ est continue, il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \in]0, 1[$, on ait : $\|\mathscr{R}(P_r)\|_1 \leq C\|P_r\|_1 = C$.
Considérons désormais une suite $(r_n) \in]0, 1[^N$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\mathscr{R}(P_{r_n})\|_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - r_n e^{it}|} \frac{dt}{2\pi} \leq C$$

On en déduit, grâce au lemme de Fatou, que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - e^{it}|} \frac{dt}{2\pi} \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - r_n e^{it}|} \frac{dt}{2\pi} \leq C$$

ce qui est absurde car $|1 - e^{it}| \underset{t\to 0}{\sim} |t|$ donc $\int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{it}|} \frac{dt}{2\pi} = +\infty$. Ceci conclut la preuve. $\square$

Remarque 3. *On aurait également pu utiliser le lemme 2 et le fait que, pour tout* $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{L^1(\mathbb{T})\to L^1(\mathbb{T})} = \|D_N\|_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *avec* D_N *le noyau de Dirichlet d'ordre* N.

On déduit immédiatement de cette proposition que les points (i) à (v) du lemme 2 ne sont pas vérifiés pour $p = 1$. Donnons désormais deux preuves du fait que, si $p > 1$, ces points sont vérifiés : une par interpolation de Riesz-Thorin, l'autre par interpolation de Marcinkiewicz.

1.2 Transformée de Hilbert

Pour montrer que, si $p > 1$, la transformée de Hilbert s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même, nous allons utiliser un résultat d'interpolation, le théorème de Riesz-Thorin, démontré ci-dessous.

1.2.1 Théorème de Riesz-Thorin

Commençons par un lemme d'analyse complexe.

Lemme 3 (Théorème des trois droites de Hadamard)**.** *Soit* F *une fonction analytique sur la bande ouverte* $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 < Re(z) < 1\}$, *continue et bornée sur* $\overline{S}$ *telle que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $|F(it)| \leq B_0$ *et* $|F(1+it)| \leq B_1$, *avec* $0 < B_0, B_1 < +\infty$.
Alors, pour tout $\theta \in [0,1]$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $|F(\theta + it)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^{\theta}$.

Démonstration. La fonction $G : z \mapsto \frac{F(z)}{B_0^{1-z} B_1^z}$ est analytique sur S, continue sur $\overline{S}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n : z \mapsto G(z) \exp\left(\frac{z^2-1}{n}\right)$ est analytique sur S, continue sur $\overline{S}$.
On note que, pour tout $z \in \overline{S}$, on a :

$$|G(z)| = \frac{|F(z)|}{B_0^{1-Re(z)} B_1^{Re(z)}} \leq \frac{|F(z)|}{\min(1, B_0)\min(1, B_1)}$$

donc G est bornée sur $\overline{S}$ par une constante $M > 0$.
On a alors, pour tout $z = x + iy \in \overline{S}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|G_n(x+iy)| \leq M \exp\left(\frac{x^2-1}{n}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{n}\right) \leq M \exp\left(-\frac{y^2}{n}\right) \quad (*)$$

car $0 \leq x \leq 1$. Notons que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|G(iy)| \leq 1 \text{ et } |G(1+iy)| \leq 1$$

i.e pour tout $z \in \mathrm{Fr}(S)$, $|G(z)| \leq 1$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$|G_n(iy)| \leq 1 \times \exp\left(-\frac{y^2+1}{n}\right) \leq 1$$

et :

$$|G_n(1+iy)| \leq 1 \times \left|\exp\left(-\frac{y^2+1-2iy}{n}\right)\right| \leq 1$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in \mathrm{Fr}(S)$, on a :

$$|G_n(z)| \leq 1 \quad (**).$$

Par $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{|y| \to +\infty} G_n(x+iy) = 0$ uniformément en x donc il existe $y(n) > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|y| \geq y(n)$, on ait $|G_n(x+iy)| \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$.
Or toute fonction analytique définie sur un compact atteint ses bornes sur la frontière de ce compact donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [-y(n), y(n)]$, $|G_n(x+iy)| \leq 1$ par $(**)$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $z \in \overline{S}$, $|G_n(z)| \leq 1$.
Finalement, pour tout $z \in \overline{S}$, on a :

$$|G(z)| = \lim_{n \to +\infty} |G_n(z)| \leq 1$$

ce qui assure le résultat. □

Théorème 4 (Riesz-Thorin)**.** *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés, T un opérateur linéaire défini sur l'ensemble des fonctions simples de X à valeurs dans l'espaces des fonctions mesurables sur Y. Soit $(p_0, p_1, q_0, q_1) \in [1, +\infty]^4$.*
Supposons qu'il existe $(M_0, M_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que, pour tout fonction simple f sur X, on ait :

$$\begin{cases} \|T(f)\|_{q_0} & \leq & M_0 \|f\|_{p_0} \\ \|T(f)\|_{q_1} & \leq & M_1 \|f\|_{p_1} \end{cases}.$$

Alors, pour tout $\theta \in]0,1[$, pour toute fonction simple f sur X, on a :

$$\|T(f)\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p$$

où $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.
Par densité, T admet une unique extension en un opérateur borné de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ dans $L^q(Y, \mathscr{B}, \nu)$.

Démonstration. Soit $f = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}$ une fonction simple sur X, où $(a_k)_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^{+*}$, $(\alpha_k)_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$, $(A_k)_{k=1}^m \subset \mathscr{A}$ sont des ensembles deux à deux disjoints de mesures finies. Par Hölder, $T(f) \in L^q(Y, \mathscr{B}, \nu)$ et par dualité, on a :

$$\|T(f)\|_q = \sup_{\substack{g \in S_Y \\ \|g\|_{q'} \leq 1}} \left| \int_Y T(f)(x) g(x) d\nu(x) \right|$$

où S_Y désigne l'ensemble des fonctions simples sur Y et q' l'exposant conjugué de q.
Soit $g = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k e^{i\beta_k} \mathbb{1}_{B_k} \in S_Y$, où $(b_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^{+*}$, $(\beta_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, $(B_k)_{k=1}^n \subset \mathscr{B}$ sont des ensembles deux à deux disjoints de mesures finies.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1} z \text{ et } Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1} z$$

où q'_0 et q'_1 sont les exposants conjugués de q_0 et q_1 respectivement.
Pour tout $z \in \overline{S} = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq Re(z) \leq 1\}$, posons également :

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x) g_z(x) d\nu(x)$$

où $f_z = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}$ et $g_z = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathbb{1}_{B_j}$.
Par linéarité, pour tout $z \in \overline{S}$, on a :

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\mathbb{1}_{A_k}) \mathbb{1}_{B_j} d\nu$$

d'où, comme $(a_k)_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^{+*}$, $(b_j)_{j=1}^n \mathbb{R}^{+*}$, F est analytique sur S, continue et bornée sur $\overline{S}$.
Pour tout $z = iy \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f_z\|_{p_0}^{p_0} &= \int_X |f_z|^{p_0} d\mu = \int_X \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k} \right|^{p_0} d\mu \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{m} \left| a_k^{P(z)} \right|^{p_0} \mathbb{1}_{A_k} d\mu \text{ car les } (A_k) \text{ sont deux à deux disjoints} \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{m} \left| e^{\frac{p}{p_0} \ln(a_k)} e^{iy \ln(a_k)\left(\frac{p}{p_1} - \frac{p}{p_0}\right)} \right|^{p_0} \mathbb{1}_{A_k} d\mu \text{ par définition de } P \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{m} a_k^p \mathbb{1}_{A_k} d\mu = \int_X |f|^p d\mu \\
&= \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

De même, pour tout $z \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = 0$, on a $\|g_z\|_{q_0'}^{q_0'} = \|g\|_{q'}^{q'}$ et pour tout $z \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = 1$, on a $\|f_z\|_{p_1}^{p_1} = \|f\|_p^p$ et $\|g_z\|_{q_1'}^{q_1'} = \|g\|_{q'}^{q'}$.
L'hypothèse et l'inégalité de Hölder assurent alors que, pour tout $z \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = 0$, on a :

$$|F(z)| \leq \|T(f_z)\|_{q_0} \|g_z\|_{q_0'} \leq M_0 \|f_z\|_{p_0} \|g_z\|_{q_0'} = M_0 \|f_z\|_{p_0} \|g_z\|_{q_0'} = M_0 \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_1}}$$

et que, pour tout $z \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = 1$:

$$|F(z)| \leq M_1 \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_1'}}.$$

Soit $\theta \in [0, 1]$. D'après le théorème des trois droites de Hadamard, pour tout $z \in \overline{S}$ vérifiant $Re(z) = \theta$, on a :

$$|F(z)| \leq \left(M_0 \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}} \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_1}} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \|f\|_p^{\frac{p}{p_1}} \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_1'}} \right)^{\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \|g\|_{q'}.$$

Or $P(\theta) = Q(\theta) = 1$ et $z = \theta \in \overline{S}$ vérifie $Re(z) = \theta$ donc, pour toute fonction simple f sur Y vérifiant $\|g\|_{q'} \leq 1$, on a :

$$\left| \int_Y T(f) g d\nu \right| = |F(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \|g\|_{q'} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p$$

ce qui assure le résultat. □

Un corollaire classique de ce théorème est le résultat suivant :

Corollaire 1 (Hausdorff-Young)**.** *Soit $p \in [1,2]$. On note q son exposant conjugué et $\lambda^{(n)}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. La transformée de Fourier $\mathscr{F}$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathscr{F}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix\cdot t} d\lambda^{(n)}(t)$$

envoie continûment $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ et est de norme inférieure ou égale à 1.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Riesz-Thorin avec $p_0 = 1$, $q_0 = +\infty$ et $p_1 = q_1 = 2$. □

1.2.2 Application à la transformée de Hilbert

Pour montrer que l'on peut étendre continûment la transformée de Hilbert si $p > 1$, nous aurons besoin de trois lemmes, énoncés ci-dessous.
Commençons par l'identité de Cotlar.

Lemme 4 (Identité de Cotlar)**.** *Pour tout $(f,g) \in \mathcal{P}$ vérifiant $\hat{f}(0) = \hat{g}(0) = 0$, on a :*

$$\mathscr{H}(f)\mathscr{H}(g) - fg = \mathscr{H}(\mathscr{H}(f)g + f\mathscr{H}(g)).$$

Démonstration. Par linéarité de la transformée de Hilbert, les applications :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ (f,g) & \mapsto & \mathscr{H}(f)\mathscr{H}(g) - fg \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{P}\times\mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ (f,g) & \mapsto & \mathscr{H}(\mathscr{H}(f)g + f\mathscr{H}(g)) \end{array} \right.$$

sont bilinéaires donc il suffit de vérifier l'identité lorsque $f = e_n$, $g = e_m$, avec $(n,m) \in (\mathbb{Z}\setminus\{0\})^2$.
Soit $(n,m) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$. On a :

$$\mathscr{H}(e_n)\mathscr{H}(e_m) - e_n e_m = (-i)^2 \operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) e_n e_m - e_n e_m = -(\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) + 1) e_{n+m}$$

et :

$$\mathscr{H}(\mathscr{H}(e_n)e_m + e_n\mathscr{H}(e_m)) = (-i)\mathscr{H}((\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m))e_{n+m}) = -\operatorname{sgn}(n+m)(\operatorname{sgn}(n)+\operatorname{sgn}(m))e_{n+m}$$

donc il suffit de vérifier que $\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) + 1 = \operatorname{sgn}(n+m)(\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m))$.
Pour cela, on distingue plusieurs cas.
• Si $\operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(m) \in \{-1, 1\}$, on a $\operatorname{sgn}(n+m) = \operatorname{sgn}(n)$ donc :

$$\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) + 1 = 2 = 2\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(n)(\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m))$$

ce qui assure le résultat dans le cas où $\operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(m)$.
• Si $m < 0 < n$, on a :

$$\operatorname{sgn}(n)\operatorname{sgn}(m) + 1 = -1 + 1 = 0 = \operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m) = \operatorname{sgn}(n)(\operatorname{sgn}(n) + \operatorname{sgn}(m))$$

ce qui assure le résultat dans le cas où $m < 0 < n$.
• Par symétrie, le résultat est également vrai si $n < 0 < m$.
Finalement, on a donc bien l'identité de Cotlar. □

Lemme 5. *Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a :*

$$\mathscr{H}(\overline{f}) = \overline{\mathscr{H}(f)}.$$

Démonstration. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(\overline{f}) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\operatorname{sgn}(n)\hat{\overline{f}}(n)e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\operatorname{sgn}(n)\overline{\hat{f}(-n)}e_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\operatorname{sgn}(-n)\overline{\hat{f}(n)}e_{-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\overline{(-i)\operatorname{sgn}(n)}\,\overline{\hat{f}(n)}\,\overline{e_n} \\
&= \overline{\mathscr{H}(f)}
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

Lemme 6. *La transformée de Hilbert $\mathscr{H}$ sur $L^2(\mathbb{T})$ vérifie $\mathscr{H}^* = -\mathscr{H}$.*

Démonstration. Pour tout $(f, g) \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{H}(f), g\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle \mathscr{H}(f), e_n\rangle\overline{\langle g, e_n\rangle} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\overline{i\operatorname{sgn}(n)\hat{g}(n)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle\overline{\langle -\mathscr{H}(g), e_n\rangle} \\
&= \langle f, -\mathscr{H}(g)\rangle
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz car $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. □

Remarque 4. *On aurait également pu utiliser le fait que $\mathscr{R}$ est une projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H_2 et que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :*

$$\mathscr{H}(f) = i(f + \hat{f}(0)\mathbb{1} - 2\mathscr{R}(f)).$$

On peut désormais prouver le théorème suivant :

Théorème 5. *Pour tout $p \in]1, +\infty[$, la transformée de Hilbert $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même.*

Remarque 5. *Cela revient à montrer que, pour tout $p \in]1, +\infty[$, il existe $C_p > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{P}$, $\|\mathscr{H}(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p$.*

Démonstration. • Commencer par montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^{2^p}(\mathbb{T})$ dans lui-même.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose H_p : $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^{2^p}(\mathbb{T})$ dans lui-même.
Pour tout $f \in \mathcal{P}$, $\mathscr{H}(f) \in \mathcal{P}$ et, par Parseval, on a :

$$\|\mathscr{H}(f)\|_2^2 = \|i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)e_n\|_2^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2$$

donc H_1 est vraie.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que H_p soit vraie. Posons $q = 2^p$.
Pour tout $f \in \mathcal{P}$ vérifiant $\hat{f}(0) = 0$ et $\|f\|_{2q} \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}(f)\|_{2q}^2 &= \||\mathscr{H}(f)|^2\|_q = \|\mathscr{H}(f)\overline{\mathscr{H}(f)}\|_q \\
&= \|\mathscr{H}(f)\mathscr{H}(\overline{f})\|_q \text{ d'après le lemme 5} \\
&= \|f\overline{f} + \mathscr{H}(\mathscr{H}(f)\overline{f} + f\mathscr{H}(\overline{f}))\|_q \text{ d'après l'identité de Cotlar} \\
&\leq \||f|^2\|_q + \|\mathscr{H}\|_{L^q(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}\|\mathscr{H}(f)\overline{f} + f\overline{\mathscr{H}(f)}\|_q \text{ par } H_q \\
&= \|f\|_{2q}^2 + \|\mathscr{H}\|_{L^q(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}\|\mathscr{H}(f)\overline{f} + f\overline{\mathscr{H}(f)}\|_q \\
&\leq 1 + 2\|\mathscr{H}\|_{L^q(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}\|\mathscr{H}(f)f\|_q \\
&\leq 1 + 2\|\mathscr{H}\|_{L^q(\mathbb{T})\to L^q(\mathbb{T})}\|\mathscr{H}(f)\|_{2q}\|f\|_{2q} \text{ d'après l'inégalité de Hölder}
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C_{2q} > 0$ telle que, pour tout $f \in \mathcal{P}$ vérifiant $\hat{f}(0) = 0$ et $\|f\|_{2q} \leq 1$, on a $\|\mathscr{H}(f)\|_{2q} \leq C_{2q}$.
On a alors, pour tout $f \in \mathcal{P}$, par linéarité de $\mathscr{H}$ sur $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}(f)\|_{2q} &= \|\mathscr{H}(f - \hat{f}(0)e_0) + \hat{f}(0)\mathscr{H}(e_0)\|_{2q} \\
&= \|\mathscr{H}(f - \hat{f}(0)e_0)\|_{2q} \\
&\leq C_{2q}\|f - \hat{f}(0)e_0\|_{2q} \text{ d'après ce qui précède} \\
&\leq C_{2q}(\|f\|_{2q} + |\hat{f}(0)|) \\
&\leq 2C_{2q}\|f\|_{2q}
\end{aligned}$$

car l'application $\left\{\begin{array}{lll} L^{2q}(\mathbb{T}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \hat{f}(0) \end{array}\right.$ est linéaire continue de norme 1.
Donc H_{p+1} est vraie. Le principe de récurrence assure que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^{2^p}(\mathbb{T})$ dans lui-même, *i.e* , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_{2^p} > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{P}$, $\|\mathscr{H}(f)\|_{2^p} \leq C_{2^p}\|f\|_{2^p}$.
• D'après le théorème de Riesz-Thorin, pour tout $p \in [2, +\infty[$, $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même.
• Montrons désormais par dualité que, pour tout $p \in]1, 2[$, $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même.
Soit $p \in]1, 2[$. Notons $q \in]2, +\infty[$ son exposant conjugué. Soit $f \in \mathcal{P}$.
Puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $L^q(\mathbb{T})$, et que l'application $\left\{\begin{array}{lll} L^q(\mathbb{T}) & \to & L^q(\mathbb{T}) \\ g & \mapsto & \overline{g} \end{array}\right.$ est une isométrie linéaire surjective, on a, par dualité :

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}(f)\|_p &= \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{T}} \mathscr{H}(f)\overline{g}\frac{d\lambda}{2\pi}\right| \\
&= \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{\mathscr{H}(g)}\frac{d\lambda}{2\pi}\right| \text{ d'après le lemme 6} \\
&\leq \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \|f\|_p\|\mathscr{H}(g)\|_q \text{ d'après l'inégalité de Hölder} \\
&\leq C_q\|f\|_p
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

On en déduit alors immédiatement (à l'aide de la remarque 1) le résultat suivant :

Corollaire 2. *Soit $p \in]1,+\infty[$. On a :*
(i) $\mathscr{H}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même ;
(ii) $(e_0, e_{-1}, e_1, \cdots, e_{-n}, e_n, \cdots)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $L^p(\mathbb{T})$;
(iii) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_p = 0$;
(iv) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|S_N\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})} \leq C$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 2. □

1.3 Projection de Riesz

Reprouvons ce corollaire en appliquant un autre résultat d'interpolation, le théorème de Marcinkiewicz, à la projection de Riesz.

1.3.1 Théorème de Marcinkiewicz

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Notations 1. *On note $L^0(\mu)$ l'espace des classes d'équivalence des applications mesurables de $(X, \mathscr{A})$ dans $\mathbb{C}$ muni de sa tribu borélienne pour la relation d'égalité μ-presque partout.*

Définition 4. *Soit $p \in [1,+\infty[$, $T : L^p(\mu) \to L^0(\mu)$ une application mesurable linéaire. On dit que T est de type faible (p,p) s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $f \in L^p(\mu)$, pour tout $a > 0$:*

$$\mu(\{x \in X; |(T(f))(x)| > a\}) \leq \frac{M}{|a|^p}\|f\|_p^p.$$

Remarque 6. *En gardant les notations de la définition précédente, on note que, grâce à l'inégalité de Markov, tout opérateur continu de $L^p(\mu)$ dans lui-même est de type faible (p,p).*

Le théorème de Marcinkiewicz est le théorème suivant :

Théorème 6 (Marcinkiewicz)**.** *Soit $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$.*
Si T est un opérateur à la fois de type faible (p_1,p_1), de constante associée $M_1^{p_1}$ et de type faible (p_2,p_2), de constante associée $M_2^{p_2}$, alors, pour tout $p_1 < p < p_2$, T définit un opérateur continu de $L^p(\mu)$ dans lui-même et $\|T\|_{L^p(\mu)\to L^p(\mu)} \leq A_p$, où :

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_1} + \frac{p}{p_2 - p}\right)^{\frac{1}{p}} M_1^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} M_2^{\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}.$$

Démonstration. Soit alors $p_1 < p < p_2$, $f \in L^p(\mu)$. Pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$\sigma(s) = \mu(\{x \in X; |(T(f))(x)| > s\}).$$

Soit $(\delta, t) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Posons également, pour tout $x \in X$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > \delta t \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq \delta t \end{cases}$$

et $g = f - h$. On a :

$$\int_X |h|^{p_1} d\mu = \int_{\{|f|>\delta t\}} |f|^{p_1} d\mu = \int_{\{|f|>\delta t\}} \frac{|f|^p}{|f|^{p-p_1}} d\mu \overset{p>p_1}{\leq} \frac{1}{(\delta t)^{p-p_1}} \int_{\{|f|>\delta t\}} |f|^p d\mu \leq \frac{1}{(\delta t)^{p-p_1}} \|f\|_p^p < \infty$$

donc $h \in L^{p_1}(\mu)$. De même, on a :

$$\int_X |g|^{p_2} d\mu = \int_{\{|f|\leq\delta t\}} |f|^{p_2} d\mu = \int_{\{|f|\leq\delta t\}} |f|^p |f|^{p_2-p} d\mu \overset{p<p_2}{\leq} (\delta t)^{p_2-p} \int_{\{|f|\leq\delta t\}} |f|^p d\mu \leq (\delta t)^{p_2-p} \|f\|_p^p < +\infty$$

donc $g \in L^{p_2}(\mu)$.
Pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, puisque $f = g + h$, l'inégalité triangulaire assure que :

$$\{x \in X; |(T(f))(x)| > s\} \subset \{x \in X; |(T(g))(x)| > s/2\} \cup \{x \in X; |(T(g))(x)| > s/2\}$$

d'où, en utilisant l'hypothèse faite sur T, pour tout $s > 0$, on a :

$$\sigma(t) \leq \mu(\{|T(h)| > s/2\}) + \mu(\{|T(g)| > s/2\}) \leq \frac{2^{p_1} M_1^{p_1}}{s^{p_1}} \|h\|_{p_1}^{p_1} + \frac{2^{p_2} M_2^{p_2}}{s^{p_2}} \|g\|_{p_2}^{p_2}.$$

On en déduit :

$$\int_X |T(f)|^p d\mu = \int_X p \int_0^{|T(f)(x)|} t^{p-1} d\lambda(t) d\mu(x)$$
$$= \int_X p \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{s\in\mathbb{R}; 0\leq s<|T(f)(x)|\}}(t) t^{p-1} d\lambda(t) d\mu(x)$$
$$= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \int_X \mathbb{1}_{\{y\in X; t<|T(f)(y)|\}}(x) d\mu(x) d\lambda(t) \text{ par Fubini-Tonelli}$$
$$= p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \sigma(t) d\lambda(t)$$
$$\leq p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \left(\frac{2^{p_1} M_1^{p_1}}{t^{p_1}} \|h\|_{p_1}^{p_1} + \frac{2^{p_2} M_2^{p_2}}{t^{p_2}} \|g\|_{p_2}^{p_2} \right) d\lambda(t)$$
$$= p 2^{p_1} M_1^{p_1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t^{p_1}} \left(\int_{\{|f|>\delta t\}} |f|^{p_1} d\mu \right) d\lambda(t) + p 2^{p_2} M_2^{p_2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t^{p_2}} \left(\int_{\{|f|\leq\delta t\}} |f|^{p_2} d\mu \right) d\lambda(t)$$
$$\overset{\text{FT}}{=} p 2^{p_1} M_1^{p_1} \int_X |f(x)|^{p_1} \left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{\delta}} t^{p-p_1-1} d\lambda(t) \right) d\mu(x) + p 2^{p_2} M_2^{p_2} \int_X |f(x)|^{p_2} \left(\int_{\frac{|f(x)|}{\delta}}^{+\infty} t^{p-p_2-1} d\lambda(t) \right) d\mu(x)$$
$$= 2^{p_1} M_1^{p_1} \frac{p}{p-p_1} \frac{1}{\delta^{p-p_1}} \int_X |f|^p d\mu + 2^{p_2} M_2^{p_2} \frac{p}{p_2-p} \delta^{p_2-p} \int_X |f|^p d\mu.$$

L'expression ci-dessus atteint son minimum en $\delta = \left(\frac{(2M_1)^{p_1}}{(2M_2)^{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_2-p_1}} > 0$, pour lequel on a :

$$\begin{aligned}
\int_X |T(f)|^p d\mu &\leq \left(2^{p_1} M_1^{p_1} \frac{p}{p-p_1} \frac{1}{\left(\frac{(2M_1)^{p_1}}{(2M_2)^{p_2}}\right)^{\frac{p-p_1}{p_2-p_1}}} + 2^{p_2} M_2^{p_2} \frac{p}{p_2-p} \left(\frac{(2M_1)^{p_1}}{(2M_2)^{p_2}}\right)^{\frac{p_2-p}{p_2-p_1}}\right) \|f\|_p^p \\
&= \left(2^p \frac{p}{p-p_1} M_1^{p_1} \frac{M_2^{p_2 \frac{p-p_1}{p_2-p_1}}}{M_1^{p_1 \frac{p-p_1}{p_2-p_1}}} + 2^p \frac{p}{p_2-p} M_2^{p_2} \frac{M_1^{p_1 \frac{p_2-p}{p_2-p_1}}}{M_2^{p_2 \frac{p_2-p}{p_2-p_1}}}\right) \|f\|_p^p \\
&= \left(2^p \frac{p}{p-p_1} \frac{M_2^{p_2 \frac{p-p_1}{p_2-p_1}}}{M_1^{p_1 \frac{p-p_2}{p_2-p_1}}} + 2^p \frac{p}{p_2-p} \frac{M_1^{p_1 \frac{p_2-p}{p_2-p_1}}}{M_2^{p_2 \frac{p_1-p}{p_2-p_1}}}\right) \|f\|_p^p \\
&= \left(2^p \frac{p}{p-p_1} \frac{M_2^{\frac{\frac{p}{p_1}-1}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}}{M_1^{\frac{\frac{p}{p_2}-1}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}} + 2^p \frac{p}{p_2-p} \frac{M_1^{\frac{1-\frac{p}{p_2}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}}{M_2^{\frac{1-\frac{p}{p_1}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}}\right) \|f\|_p^p \\
&= 2^p \left(\frac{p}{p-p_1} + \frac{p}{p_2-p}\right) \left(M_1^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} M_2^{\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}}\right)^p \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

1.3.2 Application à la projection de Riesz

On veut appliquer ce résultat d'interpolation à la projection de Riesz. Pour cela, montrons que cette application vérifie les hypothèses du théorème de Marcinkiewicz. Afin de montrer qu'elle est de type faible $(1,1)$, commençons par énoncer le lemme ci-dessous.

Lemme 7. *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles,* f *une variable aléatoire réelle vérifiant* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f$. *On a :*

$$\mathbb{P}(|f| > a) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f_n| > a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\{|f| > a + \varepsilon\} \subset \{|f - f_n| > \varepsilon\} \cup \{|f_n| > a\}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(|f| > a + \varepsilon) - \mathbb{P}(|f - f_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|f_n| > a)$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f$:

$$\mathbb{P}(|f| > a + \varepsilon) = \liminf_{n\to\infty} (\mathbb{P}(|f| > a + \varepsilon) - \mathbb{P}(|f - f_n| > \varepsilon)) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f_n| > a).$$

Or $\{|f| > a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{|f| > a + \frac{1}{k}\right\}$ et cette union est croissante donc :

$$\mathbb{P}(|f| > a) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(|f| > a + \frac{1}{k}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f_n| > a)$$

ce qui assure le résultat. □

Théorème 7 (Kolmogorov)**.** *La projection de Riesz $\mathscr{R}$ est de type faible* $(1,1)$.

Démonstration. On pose $\mu = \frac{d\lambda}{2\pi}$.
• Étape 1 : Montrons que, pour tout $f \in \mathcal{P}^+$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{1}{a}\|f\|_1$.
Soit $f \in \mathcal{P}^+$, $a > 0$. Si $f = 0$, le résultat est clair donc on peut supposer que $f \in \mathcal{P}^+ \setminus \{0\}$, ce qui entraîne $\hat{f}(0) = \|f\|_1 > 0$. Par homogénéité, on peut alors supposer que $\|f\|_1 = \hat{f}(0) = 1$. On pose :

$$h : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \hat{f}(0) + 2\sum\limits_{n\geq 1} \hat{f}(n) z^n \end{array} \right.$$

et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Puisque f est positive non nulle, on a :

$$\forall r \in [0,1[, \forall \theta \in \mathbb{R}, Re(h(re^{i\theta})) = \int_{\mathbb{T}} P_r(t) f(\theta - t) d\mu(t) > 0.$$

On peut alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, définir une fonction φ_λ holomorphe dans un voisinage du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ par la formule :

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{h(z) - \lambda}{h(z) + \lambda} + 1.$$

Or, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{C} \setminus \{-\lambda\} & \to & \mathbb{C} \\ \omega & \mapsto & \frac{\omega - \lambda}{\omega + \lambda} + 1 \end{array} \right.$ définit une représentation conforme de $\{\omega \in \mathbb{C}; Re(\omega) > 0\}$ sur $\{\xi \in \mathbb{C}; |\xi - 1| < 1\}$ et envoie $\{\omega \in \mathbb{C}; Re(\omega) > 0, |\omega| > \lambda\}$ sur $\{\xi \in C; |\xi - 1| < 1, Re(\xi) > 1\}$ donc, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, comme $Re(h(e^{i\theta})) \geq 0$, $|\varphi_\lambda(e^{i\theta}) - 1| \leq 1$ d'où $Re(\varphi_\lambda(e^{i\theta}) \geq 0$. De même, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $Re(\varphi_\lambda(e^{i\theta})) \geq 1$ lorsque $|h^*(\theta)| > \lambda$, où $h^*(\theta) := h(e^{i\theta})$.
On en déduit que, pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \mu(|h^*| > \lambda) &\leq \int_{\{|h^*|>\lambda\}} Re(\varphi_\lambda(e^{i\theta})) d\mu(\theta) \leq \int_{\mathbb{T}} Re(\varphi_\lambda(e^{i\theta})) d\mu(\theta) \\ &= Re\left(\int_{\mathbb{T}} \varphi_\lambda(e^{i\theta}) d\mu(\theta) \right) \\ &= Re(\varphi_\lambda(0)) \text{ par la formule de Cauchy} \\ &= \varphi_\lambda(0) = \frac{2}{1+\lambda}. \end{aligned}$$

Or $h^* = 2\mathscr{R}f - \mathbb{1}$ donc, pour tout $a > \frac{1}{2}$, on a :

$$\mu(|\mathscr{R}f| > a) \leq \mu(|h^*| > 2a - 1) \leq \frac{2}{1 + 2a - 1} = \frac{1}{a}$$

et on note que, pour tout $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\mu(|\mathscr{R}f| > a) \leq 1 \leq \frac{1}{a}$$

ce qui assure le résultat.
• Étape 2 : Montrons que, pour toute $f \in \mathcal{C}^+(\mathbb{T})(= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}); f \geq 0\})$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{1}{a}\|f\|_1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^+(\mathbb{T})$, $a > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on note F_n le noyau de Fejer d'ordre n, $f * F_n \in \mathcal{P}^+$ donc, d'après la première étape : $\mu(\{|\mathscr{R}(f * F_n)| > a\}) \leq \frac{1}{a}\|f * F_n\|_1$.
Or $\mathcal{C}^+(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ donc $\mathscr{R}f$ existe, est dans $L^2(\mathbb{T})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|F_n * (\mathscr{R}(f)) - \mathscr{R}(f)\|_2 = 0$ d'après le théorème de Fejer.
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{R}(f * F_n) = F_n * \mathscr{R}(f)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}(f * F_n) &= \mathscr{R}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{R}(S_k(f)) \text{ par linéarité de } \mathscr{R} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} \hat{f}(j)e_j \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e_l * e_j \\
&= F_n * \left(\sum_{j=0}^{\infty} \hat{f}(j)e_j\right)
\end{aligned}$$

par bilinéarité et continuité de $*$: $L^1(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{R}(f*F_n) = F_n*\mathscr{R}(f)$, ce qui assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\mathscr{R}(f*F_n) - \mathscr{R}(f)\|_2 = 0$ et implique la convergence en probabilité de $(\mathscr{R}(f * F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\mathscr{R}(f)$.
D'après le lemme 7, on a alors :

$$\mu(|\mathscr{R}(f)| > a) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(|\mathscr{R}(f * F_n)| > a) \leq \frac{1}{a}\liminf_{n\to\infty} \|F_n * f\|_1 = \frac{1}{a}\|f\|_1$$

d'où pour toute $f \in \mathcal{C}^+(\mathbb{T})$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{1}{a}\|f\|_1$.
• Étape 3 : Montrons que, pour tout $f \in \mathcal{P}$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{8}{a}\|f\|_1$.
Soit $f \in \mathcal{P}_\mathbb{R}$, $a > 0$. Il existe $(f^+, f^-) \in \mathcal{C}^+(\mathbb{T})$ tel que $f = f^+ - f^-$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) &\leq \mu\left(\left\{|\mathscr{R}(f^+)| > \frac{a}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|\mathscr{R}(f^-)| > \frac{a}{2}\right\}\right) \\
&\leq \frac{2}{a}\|f^+\|_1 + \frac{2}{a}\|f^-\|_1 = \frac{2}{a}\|f\|_1
\end{aligned}$$

donc, pour tout $f \in \mathcal{P}_\mathbb{R}$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{2}{a}\|f\|_1$.
Or, pour tout $f \in \mathcal{P}$, $Re(f), Im(f) \in \mathcal{P}_\mathbb{R}$ donc, pour tout $a > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) &\leq \mu\left(\left\{|\mathscr{R}(Re(f))| > \frac{a}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|\mathscr{R}(Im(f))| > \frac{a}{2}\right\}\right) \\
&\leq \frac{4}{a}\|Re(f)\|_1 + \frac{4}{a}\|Im(f)\|_1 \\
&\leq \frac{4}{a}\|f\|_1 + \frac{4}{a}\|f\|_1 = \frac{8}{a}\|f\|_1
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $f \in \mathcal{P}$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{8}{a}\|f\|_1$.
• Étape 4 : Donnons un sens à $\mathscr{R}(f)$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. D'après le théorème de Fejer, $\lim_{n\to+\infty} \|F_n * f - f\|_1 = 0$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, comme $(F_p - F_q) * f \in \mathcal{P}$, on a :

$$\mu(\{|\mathscr{R}(F_p * f) - \mathscr{R}(F_q * f)| > \varepsilon\}) = \mu(\{|\mathscr{R}((F_p - F_q) * f)| > \varepsilon\}) \leq \frac{8}{\varepsilon}\|F_p * f - F_q * f\|_1 \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui signifie que $(\mathscr{R}(F_n * f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy pour la convergence en probabilité, et converge donc en probabilité. Notons $\mathscr{R}(f)$ cette limite.
On obtient ainsi un prolongement linéaire de $\mathscr{R}$ de $\mathcal{P}$ à $L^1(\mathbb{T})$.
• Étape 5 : Montrons que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $a > 0$, $\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \frac{8}{a}\|f\|_1$.
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $a > 0$, on a, comme à l'étape 2 :

$$\mu(\{|\mathscr{R}(f)| > a\}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(\{|\mathscr{R}(F_n * f)| > a\}) \leq \frac{8}{a}\|F_n * f\|_1 \leq \frac{8}{a}\|f\|_1$$

d'où le résultat. □

Remarque 7. *On note que, si $f \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, $\lim_{n\to+\infty} \|F_n * f - f\|_2 = 0$ d'après le théorème de Fejer donc, par continuité de l'application $\left\{\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n & \mapsto & \sum_{n\geq 0} a_n e_n \end{array}\right.$, le prolongement de $\mathscr{R}$ à $L^1(\mathbb{T})$ coïncide avec cette application sur $L^2(\mathbb{T})$.*

Nous avons désormais tous les outils pour prouver le théorème de Riesz.

Théorème 8 (M. Riesz)**.** *Pour tout $p \in]1,+\infty[$, il existe $C_p > 0$ tel que :*

$$\forall f \in \mathcal{P}, \|\mathscr{R}(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p$$

ce qui signifie que, pour tout $1 < p < \infty$, $\mathscr{R}$ s'étend en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{T})$ dans lui-même.

Démonstration. • Puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, l'application

$$\mathscr{R} : \left\{\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{T}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n & \mapsto & \sum_{n\geq 0} a_n e_n \end{array}\right.$$

est bien définie et, d'après le théorème de Parseval, $\mathscr{R}$ définit un opérateur continu de norme 1. En particulier, $\mathscr{R}$ est de type faible $(2,2)$.
Les théorèmes de Marcinkiewicz et de Kolmogorov assurent alors que, pour tout $1 < p \leq 2$, il existe $C_p > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{P}$, on ait $\|\mathscr{R}(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p$.
• Traitons désormais le cas où $p \in]2,+\infty[$. Notons $q \in]1,2[$ son exposant conjugué.
Puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $L^q(\mathbb{T})$, et que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} L^q(\mathbb{T}) & \to & L^q(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & \overline{f} \end{array}\right.$ est une isométrie linéaire surjective, pour toute $f \in \mathcal{P}$, on a, par dualité :

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{R}(f)\|_p &= \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{T}} \mathscr{R}(f)\overline{g}\frac{d\lambda}{2\pi}\right| \\
&= \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{\mathscr{R}(g)}\frac{d\lambda}{2\pi}\right| \text{ car } \mathscr{R} = \mathscr{R}^* \text{ sur } L^2(\mathbb{T}) \\
&\leq \sup_{\substack{g\in\mathcal{P} \\ \|g\|_q\leq 1}} \|f\|_p\|\mathscr{R}(g)\|_q \text{ d'après l'inégalité de Hölder} \\
&\leq C_q\|f\|_p
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. $\square$

On peut alors de nouveau en déduire le corollaire 2.

2 Multiplicateurs de Fourier sur $\mathbb{R}$

2.1 Premières définitions et propriétés

Avant d'énoncer les premiers résultats, introduisons quelques notations.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on considère $L^p(\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_p = \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < \infty \\ \text{Supess}(f) \text{ si } p = +\infty \end{array} \right. .$$

Notations 2. • *On note $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}$, et $|.|$ la mesure de Lebesgue ;*
• *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note :*

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \end{array} \right. ;$$

• *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, on note encore $\hat{f}$ la transformée de Fourier-Plancherel de f ;*
• *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note :*

$$\check{f} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x\xi} dx \end{array} \right. ;$$

• *Pour tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$, on pose :*

$$\Delta_I : \left\{ \begin{array}{lll} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (\mathbb{1}_I \hat{f})^\vee \end{array} \right. .$$

Rappelons également la définition suivante :

Définition 5. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est une fonction de Schwartz si pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante $C_{n,m} > 0$ telle que :*

$$\rho_{n,m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n f^{(m)}(x) \right| = C_{n,m} < \infty.$$

Les quantités $\rho_{n,m}(f)$, $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ sont appelées semi-normes Schwartz de la fonction f. On note $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de Schwartz.

Comme sur le tore, définissons les multiplicateurs de Fourier sur la droite réelle et explicitons ceux de $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 6. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On note $\mathscr{M}_p$ l'espace des fonctions $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour lesquelles l'opérateur $T_m : \left\{ \begin{array}{lll} (\mathscr{S}(\mathbb{R}), \|.\|_p) & \to & L^p(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (m\hat{f})^\vee \end{array} \right.$ est bien défini et s'étend en un opérateur continu sur $L^p(\mathbb{R})$.*
Les éléments de $\mathscr{M}_p$ sont appelés multiplicateurs de Fourier sur $L^p(\mathbb{R})$ et, pour tout $m \in \mathscr{M}_p$, on note $\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|T_m\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})}$.

Remarque 8. *Si $m \in \mathscr{M}_2$, alors, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, $T_m f = (m\hat{f})^\vee$.*

Proposition 4. *On a $\mathscr{M}_2 = L^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\|m\|_{\mathscr{M}_2} = \|m\|_\infty$.*

Démonstration. Soit $m \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrons que $m \in \mathscr{M}_2$ et que $\|m\|_{\mathscr{M}_2} = \|m\|_\infty$.
Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème de Fourier-Plancherel :

$$\|T_m f\|_2 = \|(m\hat{f})^\vee\|_2 \overset{\text{FP}}{=} \|m\hat{f}\|_2 \leq \|m\|_\infty \|\hat{f}\|_2 \overset{\text{FP}}{=} \|m\|_\infty \|f\|_2$$

donc $m \in \mathscr{M}_2$ et $\|m\|_{\mathscr{M}_2} \leq \|m\|_\infty$.
Montrons désormais que $\|m\|_{\mathscr{M}_2} = \|m\|_\infty$.
Posons $U : \left\{ \begin{array}{lll} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array} \right.$ et $S_m : \left\{ \begin{array}{lll} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & mf \end{array} \right.$. Comme U est une isométrie surjective et que $T_m = U^{-1} S_m U$, on a $\|T_m\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} = \|S_m\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})}$.
Il suffit alors de montrer que $\|S_m\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} \geq \|m\|_\infty$. Pour cela, montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\|S_m\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} \geq \|m\|_\infty - \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de convergence monotone, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|[-n, n] \cap \{|m| \geq \|m\|_\infty - \varepsilon\}| > 0$. Avec $f = \mathbb{1}_{[-n,n] \cap \{|m| \geq \|m\|_\infty - \varepsilon\}} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a alors :

$$\|S_m f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |m(x)|^2 |f(x)|^2 dx \geq (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2 \|f\|_2^2$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, $\|S_m\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} \geq \|m\|_\infty - \varepsilon$, ce qui assure le résultat. □

Le fait que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ne soit pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$ justifie la définition suivante :

Définition 7. *On note $\mathscr{M}_\infty$ l'espace des fonctions $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $T_m f := (m\hat{f})^\vee \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|(m\hat{f})^\vee\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$.*
Pour tout $m \in \mathscr{M}_\infty$, on pose $\|m\|_{\mathscr{M}_\infty} = \inf\{C > 0; \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|T_m f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty\}$.

Afin d'expliciter un résultat de dualité concernant les multiplicateurs de Fourier, montrons les deux résultats suivants :

Lemme 8. *On a : $\overline{B_{L^\infty(\mathbb{R})} \cap C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))} = B_{L^\infty(\mathbb{R})}$.*

Démonstration. Soit $f \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}$.
Commençons par remarquer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ vérifie :
(i) $f_n \xrightarrow{pp} f$;
(ii) il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq C$;
alors le théorème de convergence dominée assure que $f_n \xrightarrow{\sigma(L^\infty, L^1)} f$.
Or $(f_n = f\mathbb{1}_{[-n,n]})_{n \in \mathbb{N}^*} \subset L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ vérifie (i) et (ii) (avec $C = 1$) donc on peut supposer que $f \in B_{L^\infty(\mathbb{R})} \cap L_1(\mathbb{R})$.
Or $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ donc il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. On en déduit qu'il existe une sous-suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{N}^*$ telle que $f_{n_k} \xrightarrow{pp} f$.
Posons :

$$P : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ \frac{z}{|z|} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

La continuité de P assure que $P(f_{n_k}) \xrightarrow{pp} P(f) = f$, avec $(P(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}^*} \subset C_c(\mathbb{R})$. On peut alors supposer que $f \in C_c(\mathbb{R}) \cap B_{L^\infty(\mathbb{R})}$.
Considérons alors une suite régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n \geq 0$, $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_n d\lambda = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.
Puisque $f \in C_c(\mathbb{R})$, f est uniformément continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\rho_n * f - f\|_\infty = 0$ et comme f est localement intégrable, $(\rho_n * f)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$.
Pour avoir le résultat, il suffit donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n * f \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour λ-presque-tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\rho_n * f|(x) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\rho_n(t)dt \leq \int_{\mathbb{R}} 1 \times \rho_n(t)dt = 1$$

ce qui assure le résultat. □

Corollaire 3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a :*

$$\|f\|_1 = \sup_{g\in B_{L^\infty(\mathbb{R})}\cap C_c^\infty(\mathbb{R})} |\langle f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}|.$$

Démonstration. On a déjà :

$$\sup_{g\in B_{L^\infty(\mathbb{R})}\cap C_c^\infty(\mathbb{R})} |\langle f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \leq \sup_{g\in B_{L^\infty(\mathbb{R})}} |\langle f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| = \|f\|_1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $h \in B_{L^\infty(\mathbb{R})} \cap C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $|\langle f, h\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \geq \|f\|_1 - \varepsilon$.
Il existe $g \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}$ telle que $|\langle f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \geq \|f\|_1 - \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le lemme précédent, il existe $h \in B_{L^\infty(\mathbb{R})} \cap C_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $|\langle f, g-h\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors :

$$|\langle f, h\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \geq |\langle f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| - |\langle f, g-h\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}| \geq \|f\|_1 - \varepsilon$$

ce qui assure le résultat. □

Notations 3. *Pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note* $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array} \right.$.

Voici le résultat de dualité concernant les multiplicateurs de Fourier, disant que les multiplicateurs de $L^p(\mathbb{R})$ sont les mêmes que ceux de $L^q(\mathbb{T})$, où $p \in [1, +\infty]$, q sont exposant conjugué. En particulier, ce résultat restreint l'étude des multiplicateurs de Fourier à ceux de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$ ou $2 \leq p$.

Proposition 5. *Soit $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, q son exposant conjugué.*
Alors T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^p(\mathbb{R})$ si et seulement si T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^q(\mathbb{R})$.
Dans ce cas, on a même $\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|m\|_{\mathscr{M}_q}$.

Démonstration. • Premier cas : $1 < p < \infty$.
Par symétrie, il suffit de montrer que si T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^p(\mathbb{R})$, alors T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^q(\mathbb{R})$ et $\|T_m\|_{L^q(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \leq \|T_m\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}$. Supposons que T_m s'étende en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^p(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^2, \left| \int_{\mathbb{R}} (T_m f)(x)\overline{g}(x)dx \right| \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \|f\|_p \|g\|_q.$$

Par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$, il suffit, pour avoir le résultat, de montrer que :

$$\forall (f,g)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})^2, \left|\int_{\mathbb{R}}(T_m g)(x)\overline{f}(x)dx\right| \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\|f\|_p\|g\|_q.$$

Soit $(f,g)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})^2$. Puisque $\widetilde{\overline{f}}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\widetilde{\overline{g}}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et que pour toute $h\in L^1(\mathbb{R})$, $\overline{\widehat{h}}=\widehat{\widetilde{\overline{h}}}$, on a, par Fourier-Plancherel :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}}(T_m g)(x)\overline{f}(x)dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}(m\hat{g})^{\vee}(x)\overline{f}(x)dx\right| \overset{\text{FP}}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} m(x)\hat{g}(x)\widehat{\overline{f}}(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} m(x)\overline{\widehat{\widetilde{\overline{g}}}}(x)\widehat{\widetilde{\overline{f}}}(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{T_m\widetilde{\overline{f}}}(x)\overline{\widehat{\widetilde{\overline{g}}}}(x)dx\right| \\
&\overset{\text{FP}}{=} \left|\int_{\mathbb{R}}(T_m\widetilde{\overline{f}})(x)\overline{\widetilde{\overline{g}}}(x)dx\right| \\
&\leq \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\left\|\widetilde{\overline{f}}\right\|_p\left\|\widetilde{\overline{g}}\right\|_q = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})}\|f\|_p\|g\|_q
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat.

• Deuxième cas : $(p,q)\in\{1,+\infty\}^2$.

$*$ Supposons que $m\in\mathscr{M}_1$. Montrons que $m\in\mathscr{M}_\infty$ et que $\|m\|_{\mathscr{M}_\infty}\leq\|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$.

Pour tout $(f,g)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})^2$, par Fourier-Plancherel, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T_m f, g\rangle_{L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}(m\hat{f})^{\vee}(x)\overline{\overline{g}}(x) = \int_{\mathbb{R}} m(x)\hat{f}(x)\overline{\widehat{\overline{g}}}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\hat{f}(x)\overline{\overline{m}\widehat{\overline{g}}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\left(\overline{m}\widehat{\widetilde{\overline{g}}}\right)^{\vee}}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\tilde{m}\hat{g}\right)^{\vee}(x)dx = \langle f, T_{\tilde{m}}g\rangle_{L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

et, pour toute $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|T_{\tilde{m}}f\|_1 = \left\|(\tilde{m}\hat{f})^{\vee}\right\|_1 = \left\|\left(m\widehat{\tilde{f}}\right)^{\vee}\right\|_1 = \left\|T_m\tilde{f}\right\|_1 \leq \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\left\|\tilde{f}\right\|_1 = \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\|f\|_1$$

donc $\tilde{m}\in\mathscr{M}_1$ et $\|T_{\tilde{m}}\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\leq\|T\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$.

On a alors, pour toute $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\|T_m f\|_\infty &= \sup_{g\in B_{L^1(\mathbb{R})}}|\langle T_m f, g\rangle_{L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R})}| = \sup_{g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\cap B_{L^1(\mathbb{R})}}|\langle T_m f, g\rangle_{L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R})}| \\
&= \sup_{g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})\cap B_{L^1(\mathbb{R})}}|\langle f, T_{\tilde{m}}g\rangle_{L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R})}| \leq \|T_{\tilde{m}}\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\|f\|_\infty \\
&\leq \|T\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'où $m\in\mathscr{M}_\infty$ et que $\|m\|_{\mathscr{M}_\infty}\leq\|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$.

$*$ Supposons que $m\in M_\infty$. Montrons que $m\in\mathscr{M}_1$ et que $\|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}\leq\|m\|_{\mathscr{M}_\infty}$.

Comme précédemment, on montre que $\tilde{m}\in\mathscr{M}_\infty$, que $\|\tilde{m}\|_{\mathscr{M}_\infty}\leq\|m\|_{\mathscr{M}_\infty}$ et que, pour tout $(f,g)\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_m f, g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})} = \langle f, T_{\tilde{m}}g\rangle_{L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})}.$$

D'après le corollaire 3 et un calcul identique à celui effectué plus haut, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|T_m f\|_1 = \sup_{B_{L^\infty(\mathbb{R})} \cap C_c^\infty(\mathbb{R})} |\langle f, T_{\tilde{m}} g \rangle_{L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})}| \leq \|\tilde{m}\|_{\mathscr{M}_\infty} \|f\|_1 \leq \|m\|_{\mathscr{M}_\infty} \|f\|_1$$

d'où le résultat. □

La proposition suivante permet de mieux comprendre les multiplicateurs de $L^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 6. *Soit $m \in L^\infty(\mathbb{R})$.*
$m \in \mathscr{M}_\infty$ si et seulement si l'opérateur $T_m : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \to & L^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (m\hat{f})^\vee \end{array} \right.$ s'étend en une application $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continue.

Remarque 9. • *D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $(m\hat{f})^\vee \in C_0(\mathbb{R})$ donc l'opérateur T_m est bien défini.*
• *On aurait pu formuler la proposition 6 en terme de continuité puisqu'un opérateur $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ qui est $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continu est en fait continu. En effet, d'après le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $\|Tf_n - g\|_\infty$ avec $(f, g) \in (L^\infty(\mathbb{R})^2$, alors $g = Tf$. En particulier, on a $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\sigma(L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R}))}{\longrightarrow}} f$ et $Tf_n \underset{n\to\infty}{\overset{\sigma(L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R}))}{\longrightarrow}} g$ donc, par $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continuité de T, on a bien $g = Tf$.*

Démonstration. $\Leftarrow$ Supposons que T_m s'étende en une application $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continue. Notons encore T_m ce prolongement. D'après la remarque précédente, T_m est un opérateur continu donc $m \in \mathscr{M}_\infty$.
$\Rightarrow$. Supposons que $m \in \mathscr{M}_\infty$. On a vu qu'alors $\tilde{m} \in \mathscr{M}_1$. Pour tout $(f, g) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_m f, g \rangle_{L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})} = \langle f, T_{\tilde{m}} g \rangle_{L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})} = \langle T_{\tilde{m}}^* f, g \rangle_{L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})}$$

donc, comme $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_1} = L_1(\mathbb{R})$, $T_m = T_{\tilde{m}}^*$ sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $T_{\tilde{m}} \in B(L^1(\mathbb{R}))$. Montrons alors que $T_{\tilde{m}}^*$ est l'unique extension $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continue de T_m de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ à $L^\infty(\mathbb{R})$. Comme $T_{\tilde{m}} \in B(L^1(\mathbb{R}))$, on sait déjà que $T_{\tilde{m}}^*$ est $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continu. Soit T une extension $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$ continue de T_m de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ à $L^\infty(\mathbb{R})$. Montrons que $T = T_{\tilde{m}}^*$. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si $Tf \neq T_{\tilde{m}}^* f$, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ tels que $V_{Tf,g,\varepsilon} \cap V_{T_{\tilde{m}}^* f,g,\varepsilon} = \varnothing$. Par $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R})) - \sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$-continuité de T et $T_{\tilde{m}}^*$, il existe $g_1, \cdots, g_n, h_1, \cdots, h_m \in L^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que :

$$T(V_{f,g_1,\cdots,g_n,\varepsilon_1}) \subset V_{Tf,g,\varepsilon} \text{ et } T_{\tilde{m}}^*(V_{f,h_1,\cdots,h_n,\varepsilon_2}) \subset V_{T_{\tilde{m}}^* f,g,\varepsilon}$$

Or on a vu que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\sigma(L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R}))} = L^\infty(\mathbb{R})$ donc il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \cap V_{f,g_1,\cdots,g_n,\varepsilon_1} \cap V_{f,h_1,\cdots,h_n,\varepsilon_2}$. Donc $T\varphi = T_{\tilde{m}}^* \varphi \in V_{Tf,g,\varepsilon} \cap V_{T_{\tilde{m}}^* f,g,\varepsilon}$, ce qui est absurde. D'où $T = T_{\tilde{m}}^*$.
De plus, comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $T_m f = T_{\tilde{m}}^* f$, ce qui conclut. □

On en déduit le résultat suivant, assurant la cohérence des notations.

Corollaire 4. *Soit $m \in \mathscr{M}_\infty$. On a :*

$$\|m\|_{\mathscr{M}_\infty} = \|T_m\|_{L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})}$$

où l'on note encore T_m le prolongement obtenu grâce à la proposition 6.

Démonstration. Notons que l'on a déjà $\|m\|_{\mathscr{M}_\infty} \leq \|T_m\|_{L^\infty(\mathbb{R})\to L^\infty(\mathbb{R})}$.
Montrons désormais que, pour toute $f \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}$, on a $\|T_m f\| \leq \|m\|_{\mathscr{M}_\infty}$. Soit $f \in B_{L^\infty(\mathbb{R})}$. D'après la preuve du lemme 8, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}) \cap B_{L^\infty(\mathbb{R})}$ qui converge vers f pour la topologie $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$. Grâce à la continuité préfaible de T_m, on a alors $T_m(f_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\sigma(L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R}))}{\longrightarrow}} T_m(f)$. On en déduit que :

$$\|T_m f\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_m(f_n)\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|m\|_{\mathscr{M}_\infty} \|f_n\| \leq \|m\|_{\mathscr{M}_\infty}$$

d'où le résultat. □

Comme sur le tore, les multiplicateurs de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ (et donc de $L^\infty(\mathbb{R})$) sont parfaitement connus. En effet, ce sont ceux qui s'expriment comme convolution avec une mesure de Borel finie. Pour le montrer, nous aurons besoin des résultats concernant l'espace de Schwartz et les distributions tempérées énoncés ci-dessous.

Proposition 7. *Soit $p \in]0, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $L^p(\mathbb{R})$. De plus, il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\|f^{(m)}\|_p \leq C_p \sum_{n=0}^{\lfloor 2/p\rfloor+1} \rho_{n,m}(f)$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. Notons qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\begin{aligned}
\|f^{(m)}\|_p &\leq \left(\int_{-1}^{1} |f^{(m)}(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x|^2 |f^{(m)}(x)|^p |x|^{-2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(2\|f^{(m)}\|_\infty^p + \left(\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x|^2 |f^{(m)}(x)|^p\right) \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x|^{-2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_p \left(\|f^{(m)}\|_\infty + \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{\lfloor 2/p\rfloor+1} |f^{(m)}(x)|\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. □

Les définitions suivantes permettent de généraliser celles vues dans l'unité d'analyse de Fourier.

Définition 8. • *Pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})'$, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on pose :*

$$\langle \tilde{u}, f\rangle = \langle u, \tilde{f}\rangle$$

et :

$$\forall h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \langle f * u, h\rangle = \langle u, \tilde{h} * f\rangle.$$

• *Pour toute $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \langle u^{(n)}, f\rangle = (-1)^n \langle u, f^{(n)}\rangle.$$

Si u est une fonction, les dérivées de u au sens des distributions sont appelées dérivées distributionnelles.

Remarque 10. *Pour tout* $(u,f)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})\times\mathscr{S}(\mathbb{R})$, *on peut identifier la distribution* $f*u$ *avec la fonction* $x\mapsto u(\tau_x(\tilde{f}))$. *En effet, on peut montrer que, pour tout* $(u,f)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})\times\mathscr{S}(\mathbb{R})$, *on a :*

$$\forall h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\langle f*u,h\rangle=\int_{\mathbb{R}}u(\tau_x(\tilde{f}))h(x)dx.$$

Commençons par admettre le théorème suivant, dont la démonstration utilise la remarque ci-dessus.

Théorème 9. *Soit* $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Alors $\varphi*u$ *est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$.
De plus, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$, *il existe* $C_\alpha,k_\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$ *tels que :*

$$\forall x\in\mathbb{R},(\varphi*u)^{(\alpha)}(x)|\leq C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}.$$

De plus, si u *est à support compact, alors* $\varphi*u\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Ce théorème et les deux lemmes ci-dessous permettent de donner une caractérisation des opérateurs bornés commutant avec les translations.

Lemme 9. *Soit* $(p,q)\in[1,+\infty]^2$, $T:L^p(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})$ *un opérateur borné qui commute avec les translations. Pour toute* $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, *les dérivées distributionnelles de* $T(f)$ *existent à tout ordre, sont des fonctions de* $L^q(\mathbb{R})$ *et :*

$$\forall n\in\mathbb{N},(T(f))^{(n)}=T(f^{(n)}).$$

Démonstration. Soit $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. On note qu'il suffit de prouver le résultat pour $n=1$.
• Commençons par montrer que $\lim\limits_{h\to0}\frac{Id-\tau_h}{h}(f)=f'$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$. Montrons que :

$$\lim_{h\to0}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^\beta\frac{f^{(\alpha)}(x)-f^{(\alpha)}(x-h)}{h}-x^\beta f^{(\alpha+1)}(x)\right|=0.$$

Pour tout $h\in\mathbb{R}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left|x^\beta\frac{f^{(\alpha)}(x)-f^{(\alpha)}(x-h)}{h}-x^\beta f^{(\alpha+1)}(x)\right|&\overset{\text{TAF}}{=}\left|x^\beta(f^{(\alpha+1)}(y)-f^{(\alpha+1)}(x))\right|\text{ avec }y\in]x,x+h[\\&\overset{\text{TAF}}{=}\left|x^\beta f^{(\alpha+1)}(z)(x-y)\right|\text{ avec }z\in]x,y[\\&\leq|h|\left|x^\beta f^{(\alpha+1)}(z)\right|\underset{h\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{h\to0}\frac{Id-\tau_h}{h}(f)=f'$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
• D'après la proposition 7, on a donc :

$$\lim_{h\to0}\frac{Id-\tau_h}{h}(f)=f'\text{ dans }L^p(\mathbb{R})$$

d'où, par continuité de l'opérateur T :

$$\lim_{h\to0}T\left(\frac{Id-\tau_h}{h}(f)\right)=T(f')\text{ dans }L^q(\mathbb{R})(*).$$

• On en déduit que, pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T(f)', g\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} T(f)(x)g'(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} T(f)(x) \lim_{h\to 0} \frac{(\tau_{-h}g)(x) - g(x)}{h} dx \\
&\underset{\text{TAF}}{\overset{\text{TCVD}}{=}} -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} T(f)(x) \left(\frac{\tau_{-h} - Id}{h}\right)(g)(x)dx \\
&\overset{u=x-h}{=} \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{Id - \tau_h}{h} \circ T(f)\right)(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale donc, comme T est continu et commute avec les translations, pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T(f)', g\rangle &= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} T\left(\frac{Id - \tau_h}{h}(f)\right)(x)g(x)dx \\
&\underset{\text{TAF}}{\overset{\text{TCVD}}{=}} \int_{\mathbb{R}} T\left(\lim_{h\to 0} \frac{Id - \tau_h}{h}(f)\right)(x)g(x)dx \\
&= \langle T(f'), g\rangle \text{ par } (*)
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

Lemme 10. *Soit $q \in [1, +\infty]$, $h \in L^q(\mathbb{R})$.*
Si toutes les dérivées distributionnelles $h^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, sont aussi dans $L^q(\mathbb{R})$, alors h est égale presque-partout à une fonction H continue satisfaisant :

$$|H(0)| \leq C_q \sum_{k=0}^{2} \|h^{(k)}\|_q$$

où $C_q > 0$ est une constante ne dépendant que de q (et pas de h).

Démonstration. Notons q' l'exposant conjugué de q. Soit $R \in [1, +\infty[$, $\varphi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-R, R]$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash] - 2R, 2R[$.
Puisque $h \in L^q(\mathbb{R})$, $\varphi_R h \in L^1(\mathbb{R})$.
• Montrons que $\widehat{\varphi_R h} \in L^1(\mathbb{R})$.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + |x|)^2 \leq 1 + 2\pi|x| + 4\pi x^2$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq (1 + |x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} |(-2i\pi x)^k|$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\varphi_R h}(x)\right| &\leq (1+|x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} \left|(-2i\pi x)^k \widehat{\varphi_R h}(x)\right| \\
&\leq (1+|x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} \left\|\widehat{(\varphi_R h)^{(k)}}\right\|_\infty \\
&\leq (1+|x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} \left\|(\varphi_R h)^{(k)}\right\|_1 \\
&\leq (4R)^{\frac{1}{q'}} (1+|x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} \left\|(\varphi_R h)^{(k)}\right\|_q \text{ par Hölder.}
\end{aligned}$$

La règle de Leibniz et le fait que toutes les dérivées de φ_R soient bornées par une constante (dépendant de R) assurent alors qu'il existe une constante $C_{q,R} > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\left|\widehat{\varphi_R h}(x)\right| \leq C_{q,R}(1+|x|)^{-2} \sum_{k=0}^{2} \left\|h^{(k)}\right\|_q (*)$$

d'où $\widehat{\varphi_R h} \in L^1(\mathbb{R})$.

• On en déduit que, pour tout $R \geq 1$, $\varphi_R h = (\widehat{\varphi_R h})^\vee$, d'où $\varphi_R h$ est égale presque-partout à une fonction continue. Or, pour tout $R \geq 1$, φ_R vaut 1 sur $[-R, R]$ donc h est égale presque-partout à une fonction continue sur $[-R, R]$, d'où h est égale presque-partout à une fonction continue sur $\mathbb{R}$, notée H.

Finalement, comme $|H(0)| = |\varphi_1 h(0)| = \left|(\widehat{\varphi_R h})^\vee(0)\right| \leq \|\varphi_1 h\|_1$, on a bien le résultat grâce à $(*)$. □

Théorème 10. *Soit $(p, q) \in [1, +\infty]^2$, $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ un opérateur borné qui commute avec les translations. Il existe une unique distribution tempérée $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), T(f) = f * v.$$

Démonstration. D'après les lemmes 9 et 10, on peut définir une application linéaire u sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \langle u, f\rangle = T(f)(0).$$

• Montrons que $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Notons $C_q > 0$ la constante donnée par le lemme 10 et $C_p > 0$ la constante donnée par la proposition 7. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
|\langle u, f\rangle| &\leq C_q \sum_{n=0}^{2} \|(T(f))^{(n)}\|_q \text{ par le lemme 10} \\
&\leq C_q \sum_{n=0}^{2} \|T(f^{(n)})\|_q \text{ par le lemme 9} \\
&\leq C_q \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{2} \|f^{(n)}\|_p \\
&\leq C_q C_p \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{2} \sum_{l=0}^{\lfloor 2/p \rfloor+1} \rho_{l,n}(f)
\end{aligned}$$

donc $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
• Montrons désormais que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $T(f) = f * \tilde{u}$.
La remarque 10 et le théorème 9 justifient que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \tau_{-x}(T(f))(0) \\ &= T(\tau_{-x}(f))(0) \text{ car } T \text{ commute avec les translations} \\ &= \langle u, \tau_{-x}(f)\rangle = \langle \tilde{u}, \tau_x(\tilde{f})\rangle \\ &= (f * \tilde{u})(x) \end{aligned}$$

ce qui assure le résultat avec $v = \tilde{u}$, l'unicité étant claire. □

Grâce à cette caractérisation des opérateurs commutant avec les translations et le théorème de Banach-Alaoglu, on peut expliciter comme dans le cas du tore les multiplicateurs de $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 11. *On note* $C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}); \lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$*, que l'on munit de la norme* $\|.\|_\infty$*. Le théorème de Riesz assure que le dual de* $C_0(\mathbb{R})$ *est l'espace des mesures de Borel finies.*

Pour pouvoir appliquer le théorème de Banach-Alaoglu, montrons que l'espace $C_0(\mathbb{R})$ est séparable.

Lemme 11. *L'espace* $C_0(\mathbb{R})$ *est séparable.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $C_n = \{f \in C_c(\mathbb{R}); \mathrm{Supp}(f) \subset [-n, n]\}$. On note que $C_0(\mathbb{R}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ donc il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace C_n est séparable.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\left\{ \begin{array}{lcl} (C_n, \|.\|_\infty) & \to & (C([-n,n]), \|.\|_\infty) \\ f & \mapsto & f_{|[-n,n]} \end{array} \right.$ est une isométrie linéaire et $C([-n, n])$ est séparable d'où le résultat. □

Théorème 11. *Soit* $m \in L^\infty(\mathbb{R})$.
On a : $m \in \mathscr{M}_1$ *si et seulement s'il existe une mesure de Borel (complexe) finie* μ *tel que, pour tout* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$*, on ait* $T_m(f) = f * \mu$.
Dans ce cas, $\|m\|_{\mathscr{M}_1} = \|\mu\|_{TV}$.

Démonstration. $\Leftarrow$. Supposons qu'il existe une mesure de Borel (complexe) finie μ tel que, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait $T_m(f) = f * \mu$.
Alors T_m est bien un opérateur borné de $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même et $\|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{TV}$.
En effet, si on note $|\mu|$ la variation de la mesure μ, le théorème de décomposition polaire assure qu'il existe une fonction mesurable h sur $\mathbb{R}$ telle que $|h| = 1$ $|\mu|$-presque-partout et telle que μ soit la mesure qui admet pour densité h par rapport à $|\mu|$. On a alors, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\|T_m(f)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(-x-t)h(t)d|\mu|(t) \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(-x-t)| d|\mu|(t) dx \overset{\text{FT}}{=} \|f\|_1 \|\mu\|_{TV}.$$

$\Rightarrow$. Supposons que $m \in \mathscr{M}_1$. D'après le théorème 10, il existe $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait $T_m(f) = f * u$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \mapsto ne^{-\pi n x^2}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$ donc, comme T est borné, la suite $(f_n * u)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après la remarque 11, le théorème

de Banach-Alaoglu et le lemme 11, il existe une sous-suite $(f_{n_k} * u)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n * u)_{n\in\mathbb{N}}$ et une mesure de Borel finie μ telles que :

$$\forall g \in C_0(\mathbb{R}), \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)(f_{n_k} * u)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x) \ \ (*).$$

Montrons que $u = \mu$ (on identifie μ à un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$).
On peut montrer que, pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $(g * f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ d'où $\lim\limits_{k\to\infty} \langle u, f_{n_k} * g\rangle = \langle u, g\rangle$. Or, pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, d'après ce qui précède, on a :

$$\langle \mu, g\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_{n_k} * u, g\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u, \tilde{f_{n_k}} * g\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u, f_{n_k} * g\rangle$$

d'où $u = \mu$. Montrons alors que $\|\mu\|_{TV} \leq \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$.
Par $(*)$, pour toute $g \in C_0(\mathbb{R})$, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x)\right| \leq \|g\|_\infty \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_{n_k} * u\|_1 \leq \|g\|_\infty \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$$

ce qui assure, d'après le théorème de Riesz que $\|\mu\|_{TV} \leq \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})}$. L'autre inégalité ayant déjà été prouvée, on a bien le résultat. □

2.2 Théorie de Calderón-Zygmund

Les résultats principaux de cette partie donnant une condition suffisante pour que des opérateurs soient des multiplicateurs de Fourier font appel à la théorie de Calderón-Zygmund, développée par les mathématiciens Alberto Calderón et Antoni Zygmund.
Avant d'énoncer le théorème de décomposition de Calderón-Zygmund, introduisons la notion de noyau de Calderón-Zygmund et d'intervalles dyadiques.

Définition 9. • *On appelle noyau de Calderón-Zygmund une fonction $K : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}$ localement intégrable vérifiant :*
(K1) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|K(x)| \leq \frac{B}{|x|}$ *;*
(K2) $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)|dx \leq B$ *;*
(K3) $\forall (r,s) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\int_{r<|x|<s} K(x)dx = 0$
pour une constante $B > 0$.
La condition (K2) est appelée condition de Hörmander.
• *L'opérateur de Calderón-Zygmund associé au noyau K est défini par :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, T_K f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)dy.$$

Remarque 12. *La limite ci-dessus est bien définie. En effet, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\delta > 0$, grâce à la condition (K1), on a :*

$$\int_{|x-y|>\delta} |K(x-y)||f(y)|dy \leq \int_{|x-y|>\delta} \frac{B}{|x-y|}|f(y)|dy \leq \frac{B}{\delta}\|f\|_1 < +\infty$$

et, pour tout $\eta > \delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{|x-y|>\delta} K(x-y)f(y)dy - \int_{|x-y|>\eta} K(x-y)f(y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\eta \geq |x-y|>\delta} K(x-y)f(y)dy\right| \\
&\overset{u=x-y}{=} \left|\int_{\eta \geq |u|>\delta} K(u)(f(x-u)-f(x))du\right| \text{ par (K3)} \\
&\leq B \sup_{u\in[0,1]} |f'(u)| \int_{\eta \geq |u|>\delta} \frac{|u|}{|u|} du \text{ par (K1) et l'inégalité des accroissementes finis} \\
&= B \sup_{u\in[0,1]} |f'(u)|(\eta-\delta) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Définition 10. *On appelle intervalle dyadique tout ensemble de la forme $[2^l m, 2^l(m+1)[$, où $(l,m) \in \mathbb{Z}^2$.*

Proposition 8. *Soit (Q, Q') un couple d'intervalles dyadiques.*
On a : soit $Q \cap Q' = \varnothing$, soit $Q \subset Q'$, soit $Q' \subset Q$.

Démonstration. Par définition, il existe $(l, l', m, m') \in \mathbb{Z}^4$ tel que $Q = [2^l m, 2^l(m+1)[$ et $Q' = [2^{l'} m', 2^{l'}(m'+1)[= [2^{l'-l}m'2^l, 2^{l'-l}(m'+1)2^l[$. Par symétrie, on peut supposer $l \leq l'$. Supposons alors $Q \cap Q' \neq \varnothing$. Montrons que $Q \subset Q'$, *i.e* que $2^{l'-l}m' \leq m$ et $m+1 \leq 2^{l'-l}(m'+1)$. Puisque $Q \cap Q' \neq \varnothing$, il existe $x \in Q \cap Q'$. Alors $2^l m \leq x < 2^l(m+1)$ et $2^{l'}m' \leq x < 2^{l'}(m'+1)$, donc $m < 2^{l'-l}(m'+1)$ et $2^{l'-l}m' < m+1$. Or, comme on a supposé $l \leq l'$, on a $(2^{l'-l}(m'+1), 2^{l'-l}m') \in \mathbb{Z}^2$, ce qui assure le résultat car $m \in \mathbb{Z}$. □

Pour démontrer le théorème de décomposition de Calderón-Zygmund, nous aurons besoin du théorème suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans le livre de Rudin [4].

Théorème 12 (Théorème de différentiation de Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $(I_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'intervalles ouverts contenant x vérifiant : il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{+*}$ convergeant vers 0 pour laquelle $\lambda(I_n(x)) \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Pour λ-presque-tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda(I_n(x))} \int_{I_n(x)} f(u)du = f(x).$$

Le théorème de décomposition de Calderón-Zygmund est le suivant :

Théorème 13 (Décomposition de Calderón-Zygmund)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$.*
Il existe deux fonctions g et b dans $L^1(\mathbb{R})$ vérifiant :
(i) $|g| \leq \lambda$ (presque partout) ;
(ii) $b = \sum_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_Q f$, où $\mathscr{B}$ est une collection de intervalles dyadiques disjoints ;
(iii) $\forall Q \in \mathscr{B}$, $\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq 2\lambda$;
(iv) $\left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q\right| < \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$;
(v) $f = g + b$ (presque partout).

Démonstration. Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on définit une collection d'intervalles dyadiques par :

$$\mathcal{D}_l = \{[2^l m, 2^l(m+1)[, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $l \geq l_0$, $\frac{1}{2^l}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \leq \lambda$. En particulier, pour tout $Q \in \mathcal{D}_{l_0}$, $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq \lambda$.
Construisons progressivement une famille $\mathscr{B}$ d'intervalles dyadiques disjoints.
Tout intervalle de $\mathcal{D}_{l_0}$ peut être découpé en deux intervalles dyadiques disjoints de longueur 2^{l_0-1}. Un tel intervalle Q' de longueur 2^{l_0-1} vérifie : soit $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq \lambda$, soit $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx > \lambda$.
• Si Q' est dans la deuxième situation, on arrête de diviser Q' et on l'inclut dans $\mathscr{B}$. Dans ce cas :

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|dx \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq 2\lambda$$

où on a noté Q l'intervalle dyadique dont est issu Q'.
• Si Q' est dans la première situation, on découpe de nouveau Q' en deux intervalles dyadiques disjoints de même longueur auxquels on rapplique cette opération jusqu'à obtenir une collection d'intervalles dyadiques disjoints $\mathscr{B}$ vérifiant (iii).
De plus, on a :

$$\left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q\right| \leq \sum_{Q\in\mathscr{B}} |Q| < \sum_{Q\in\mathscr{B}} \frac{1}{\lambda}\int_Q |f(x)|dx \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1.$$

• Considérons désormais $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} \overline{Q}\right)$. Comme la famille $\mathcal{D}_{l_0}$ recouvre $\mathbb{R}$, x_0 est contenu dans une suite décroissante $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intervalles dyadiques telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|dx \leq \lambda.$$

D'après le théorème de différentiation de Lebesgue, on a alors, pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} \overline{Q}\right)$, $|f(x_0)| \leq \lambda$.
• Comme $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q\right)$ et $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} \overline{Q}\right)$ diffèrent d'un ensemble de mesure nulle, on a bien le résultat en posant $b = \sum_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_Q f$ et $g = f - \sum_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_{\overline{Q}} f$. □

Remarque 13. *En reprenant les notations du théorème précédent, comme* $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ *pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

Ce théorème de décomposition permet de prouver le théorème suivant, affirmant que, sous certaines hypothèses, un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ est de type faible $(1,1)$.

Théorème 14. *Soit T un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ tel que, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, pour presque-tout $x \notin$ Supp(f), $(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy$ où $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$ satisfait (K2) avec constante $B > 0$. Alors :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \forall \lambda > 0, |\{x \in \mathbb{R}; |(Tf)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$$

avec $C = 4(1 + B + \|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})})$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. On peut supposer T non nul. On pose alors $\gamma = \frac{\lambda}{2\|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})}}$.

• D'après le théorème de décomposition de Calderón-Zygmund, il existe $(g,b) \in L^1(\mathbb{R})^2$ vérifiant :

(*i*) $|g| \leq \gamma$;

(*ii*) $b = \sum\limits_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_Q f$, où $\mathscr{B}$ est une collection d'intervalles dyadiques disjoints ;

(*iii*) $\forall Q \in \mathscr{B}$, $\gamma < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx \leq 2\gamma$;

(*iv*) $\left|\bigcup\limits_{Q\in\mathscr{B}} Q\right| < \frac{1}{\gamma}\|f\|_1$;

(*v*) $f = g + b$.

On note de plus, d'après la démonstration du théorème 13 que, pour tout $Q \in \mathscr{B}$, $\mathrm{Supp}(g)\cap Q = \varnothing$. Posons alors :

$$\left\{\begin{array}{lll} f_1 & = & g + \sum\limits_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx \\ f_2 & = & b - \sum\limits_{Q\in\mathscr{B}} \mathbb{1}_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx = \sum\limits_{Q\in\mathscr{B}} f_Q \end{array}\right.$$

où, pour tout $Q \in \mathscr{B}$, $f_Q = \mathbb{1}_Q\left(f - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx\right)$.

On a $f_1 + f_2 = f$ et $\|f_1\|_\infty \leq 2\gamma$ car, pour tout $Q \in \mathscr{B}$, $\mathrm{Supp}(g)\cap Q = \varnothing$. On a de plus :

$$\|f_1\|_1 \leq \|g\|_1 + \sum_{Q\in\mathscr{B}} \int_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dxdu = \|g\|_1 + \|b\|_1 = \|f\|_1$$

car $\mathrm{Supp}(g)\cap\mathrm{Supp}(b) = \varnothing$, et :

$$\|f_2\|_1 = \sum_{Q\in\mathscr{B}} \int_Q |f_Q(x)|dx \leq \sum_{Q\in\mathscr{B}} \left(\int_Q |f(x)|dx + |Q|\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right) \leq 2\|f\|_1.$$

En particulier, $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$ et, d'après l'inégalité de Hölder, $\|f_1\|_2^2 \leq \|f_1\|_\infty\|f_1\|_1 \leq 2\gamma\|f\|_1$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure alors que :

$$\begin{aligned} |\{x\in\mathbb{R}; |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x\in\mathbb{R}; |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x\in\mathbb{R}; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2}\|Tf_1\|_2^2 + \left|\left\{x\in\mathbb{R}; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2}\|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})}^2\|f_1\|_2^2 + \left|\left\{x\in\mathbb{R}; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{4}{\lambda}\|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})}\|f\|_1 + \left|\left\{x\in\mathbb{R}; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|. \end{aligned}$$

• Pour tout $Q \in \mathscr{B}$, on note Q^* le dilaté de Q d'un facteur 2 (*i.e* si $Q = [a-b, a+b]$ avec

$a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, alors $Q^* = [a-2b, a+2b]$). On a alors, d'après l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R}; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &= \left|\left\{x \in \bigcup_{Q \in \mathscr{B}} Q^*; |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q \in \mathscr{B}} Q^*\right); |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\
&\leq \left|\bigcup_{Q \in \mathscr{B}} Q^*\right| + \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{Q \in \mathscr{B}} Q^*\right)} |Tf_2(x)| dx \\
&\leq 4 \sum_{Q \in \mathscr{B}} |Q| + \frac{2}{\lambda} \sum_{Q \in \mathscr{B}} \int_{\mathbb{R} \setminus Q^*} |Tf_Q(x)| dx \\
&\leq \frac{4}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{2}{\lambda} \sum_{Q \in \mathscr{B}} \int_{\mathbb{R} \setminus Q^*} |Tf_Q(x)| dx.
\end{aligned}$$

Soit $Q \in \mathscr{B}$. On note y_Q le centre de l'intervalle Q. On note que $f_Q \in L^2(\mathbb{R})$ est à support compact et que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Q^*$, $x \notin \mathrm{Supp}(f)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Q^*$, on a :

$$(Tf_Q)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y) f_Q(y) dy = \int_Q K(x-y) f_Q(y) dy = \int_Q (K(x-y) - K(x-y_Q)) f_Q(y) dy$$

car $\int_Q f_Q(y) dy = 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R} \setminus Q^*} |Tf_Q(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus Q^*} \int_Q |K(x-y) - K(x-y_Q)| |f_Q(y)| dy dx \\
&\overset{\text{FT}}{=} \int_Q \int_{\mathbb{R} \setminus Q^*} |K((x-y_Q) - (y-y_Q)) - K(x-y_Q)| dx |f_Q(y)| dy \\
&\overset{\text{(K2)}}{\leq} B \int_Q |f_Q(y)| dy \\
&\leq 2B \int_Q |f(y)| dy
\end{aligned}$$

grâce à la condition de Hörmander car, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Q^*$, pour tout $y \in Q$, on a $|x - y_Q| > 2|y - y_Q|$.
On en déduit que, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}; |Tf(x)| > \lambda\}| &\leq \frac{4}{\lambda} \|T\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} \|f_1\|_1 + \frac{4}{\lambda} \|f\|_1 + \frac{4B}{\lambda} \sum_{Q \in \mathscr{B}} \int_Q |f(y)| dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1
\end{aligned}$$

avec $C = 4(1 + B + \|T\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})})$, ce qui assure le résultat. □

Pour prouver le dernier théorème de cette sous-partie, le théorème de Calderón-Zygmund, nous aurons besoin d'un résultat d'interpolation plus fin que ceux donnés dans la première partie. Pour l'obtenir, on commence par appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz puis le théorème de Riesz-Thorin.

Lemme 12. *Soient $1 < p < 2$, T un opérateur linéaire de type $(1,1)$ avec constante A_0 et de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec norme A_1.*
Alors T définit un opérateur linéaire continu de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même avec une norme au plus égale à $C \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} A_0^{\frac{2}{p}-1} A_1^{2-\frac{2}{p}}$, où C est une constante strictement positive.

Démonstration. D'après le théorème 6, T définit un opérateur continu de $L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R})$ dans lui-même avec :

$$A_2 = \|T\|_{B\left(L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R})\right)} \leq 2\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{\frac{p+1}{2}-1} + \frac{\frac{p+1}{2}}{2-\frac{p+1}{2}}\right)^{\frac{2}{p+1}} A_0^{\frac{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} A_1^{\frac{1-\frac{2}{p+1}}{1-\frac{1}{2}}}$$
$$= 2\left(\frac{p+1}{p-1} + \frac{p+1}{3-p}\right)^{\frac{2}{p+1}} A_0^{\frac{3-p}{p+1}} A_1^{\frac{2(p-1)}{p+1}}.$$

Appliquons désormais le théorème de Riesz-Thorin entre $\frac{p+1}{2}$ et 2.
On a $\frac{1}{p} = \frac{2\theta}{p+1} + \frac{1-\theta}{r}$, avec $\theta = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{p+1}-\frac{1}{2}} = \frac{(2-p)(p+1)}{p(3-p)}$.
D'après le théorème de Riesz-Thorin, T définit un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même avec :

$$C_p = \|T\|_{B(L^p(\mathbb{R}))} \leq A_2^{\theta} A_1^{1-\theta}$$
$$= 2^{\theta}\left(\frac{p+1}{p-1} + \frac{p+1}{3-p}\right)^{\frac{2\theta}{p+1}} A_0^{\frac{2}{p}-1} A_1^{2-\frac{2}{p}}.$$

Il suffit alors de montrer que la fonction f définie sur $]1,2[$ par :

$$\forall x \in]1,2[, f(x) = 2^{\theta(x)}(x-1)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+1}{3-x}\right)^{\frac{2\theta(x)}{x+1}} = 2^{\theta(x)}(x-1)^{\frac{x-1}{x(3-x)}}\left(x+1+\frac{x^2-1}{3-x}\right)^{\frac{2\theta(x)}{x+1}}$$

avec $\theta(x) = \frac{(2-x)(x+1)}{x(3-x)}$, est bornée.
Or f est continue et admet des limites finies en 1 et 2 donc f est bornée, ce qui assure le résultat. $\square$

Remarque 14. • *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesurable. On note $L^0(\Omega)$ l'ensemble des applications mesurables de $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.*
• *Rappelons la définition suivante : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^0(\mu)$, $f \in L^0(\mu)$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$.*
• *L'application $d : \left\{\begin{array}{lcl} L^0(\mu)\times L^0(\mu) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \inf\{\delta > 0; \mu(|f-g| \geq \delta) \leq \delta\}\end{array}\right.$ définit une métrique sur $L^0(\mu)$. De plus $(L^0(\mu), d)$ est un espace métrique complet et (f_n) converge en mesure vers f si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$.*
• *Le lemme 7 reste vrai dans le cas de la convergence en mesure.*

Théorème 15 (Calderón-Zygmund)**.** *Soient $K \in L^2(\mathbb{R})$, $(B_1, B_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{K}(\xi)| \leq B_1$ et K vérifie (K2) avec constante B_2.*
Posons $T_K : \left\{\begin{array}{lcl} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy\right)\end{array}\right.$.
Pour tout $p \in]1,+\infty[$, $T_{K|\mathscr{S}(\mathbb{R})}$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R})$ avec

$$\|T_K\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \leq C' \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$$

où $C' = 32(1 + B_2 + B_1)$.

Démonstration. Soit $p \in]1, +\infty[$. Commençons par voir que, d'après le théorème de Fourier-Plancherel, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\|T_K f\|_2 = \|\widehat{K * f}\|_2 = \|\hat{K}\hat{f}\|_2 \le B_1 \|\hat{f}\|_2 = B_1 \|f\|_2.$$

• L'opérateur T_K vérifie alors les hypothèses du théorème précédent, donc, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$|\{x \in \mathbb{R}; |T_K f(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

avec $C = 4(1 + B_2 + B_1)$.
Définissons alors l'opérateur T_K sur $L^1(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. La suite $(T_K f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la convergence en mesure donc, d'après la remarque précédente, $(T_K f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure. On note $T_K f$ cette limite (on note qu'elle ne dépend pas de la suite $(f_n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ choisie). On a ainsi étendu de façon linéaire la définition de l'opérateur T_K à $L^1(\mathbb{R})$ et, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a encore $|\{x \in \mathbb{R}; |T_K f(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$ grâce à l'analogue du lemme 7.
• Supposons pour l'instant que $1 < p < 2$. D'après le lemme 12, $T_{K|\mathscr{S}(\mathbb{R})}$ s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même avec :

$$\|T_K\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \le \frac{C_1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} C^{\frac{2}{p}-1} B_1^{2-\frac{2}{p}} \le \frac{C_1 C}{p-1}$$

car $1 < p < 2$ et $B_1 \le C$, où C_1 est une constante strictement positive.
• Supposons désormais $p > 2$. Notons $q \in]1, 2[$ son exposant conjugué. L'opérateur T_K est un multiplicateur de Fourier de symbole $\check{K}$ donc, d'après la proposition 5, T_K s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même et

$$\|T_K\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \le \frac{C_1 C}{q-1} = \frac{(C_1 C)p}{q} < (C_1 C)p.$$

On a donc bien le résultat. □

2.3 Théorème de Mikhlin

Nous avons désormais tous les outils pour prouver le théorème de Mikhlin, énoncé ci-dessous, donnant une condition suffisante pour qu'une fonction définisse un multiplicateur de Fourier.

Théorème 16 (Mikhlin)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[$, $m : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}$ bornée de classe C^1, $A > 0$ tels que :*

$$(H) \left\{ \begin{array}{lll} \sup\limits_{R>0} \frac{1}{R} \int_{R\le|\xi|\le 2R} |m(\xi)|^2 d\xi & \le & A^2 \\ \sup\limits_{R>0} R \int_{R\le|\xi|\le 2R} |m'(\xi)|^2 d\xi & \le & A^2 \end{array} \right. .$$

Alors T_m s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même et :

$$\|T_m\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \le C(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. • Étape 1 : Décomposition dyadique de l'unité
Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\chi \equiv 1$ sur $[-1,1]$, $\chi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}\backslash]-2,2[$, $0 < \chi(x) < 1$ pour tout $x \in]-2,-1[\cup]1,2[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(x) = \chi(x) - \chi(2x)$. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=-N}^{N} \psi(2^j x) = \chi(2^{-N}x) - \chi(2^{N+1}x)$$

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{j=-N}^{N} \psi(2^j x) = 1$.
On note que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Supp}(\psi(2^j\cdot)) = [2^{-j-1}, 2^{-j+1}] \cup [-2^{-j+1}, -2^{-j-1}]$ et que, pour tout $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ compact :

$$J_K = \mathrm{Card}\{j \in \mathbb{Z}; \mathrm{Supp}(\psi(2^j\cdot)) \cap K \neq \varnothing\} < +\infty.$$

Ceci permet de définir correctement $m = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} m_j$ où, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, $m_j(\xi) = m(\xi)\psi(2^{-j}\xi)$. On pose également, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $K_j = \check{m}_j$.
• Étape 2 : $\exists C_1 > 0; \forall j \in \mathbb{Z}, \int_\mathbb{R} |K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}} dx \leq C_1 A$
Soit $j \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} |K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}} dx &= \int_\mathbb{R} |K_j(x)|(1+2^j|x|)(1+2^j|x|)^{-\frac{3}{4}} dx \\ &\overset{\text{CS}}{\leq} \left(\int_\mathbb{R} |K_j(x)|^2(1+2^j|x|)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\mathbb{R} (1+2^j|x|)^{-\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

avec :

$$\left(\int_\mathbb{R} (1+2^j|x|)^{-\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \overset{u=2^j x}{=} \left(\int_\mathbb{R} (1+|u|)^{-\frac{3}{2}} du\right)^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{j}{2}} = B_1 2^{-\frac{j}{2}}$$

où $0 < B_1 = \left(\int_\mathbb{R} (1+|u|)^{-\frac{3}{2}} du\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, et :

$$\begin{aligned}\left(\int_\mathbb{R} |K_j(x)|^2(1+2^j|x|)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_\mathbb{R} |K_j(x)|^2(1+2^{j+1}|x|+2^{2j}|x|^2) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\left(\int_\mathbb{R} |K_j(x)|^2(1+2^{2j}|x|^2) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\left(\|K_j\|_2 + 2^j \left(\int_\mathbb{R} |K_j(x)|^2|x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

d'où, si l'on pose $B_2 = \sqrt{2}B_1$:

$$\int_\mathbb{R} |K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}} dx \leq 2^{-\frac{j}{2}} B_2 \left(\|K_j\|_2 + 2^j \left(\int_\mathbb{R} |K_j|^2|x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) \overset{\text{FP}}{=} 2^{-\frac{j}{2}} B_2 (\|m_j\|_2 + 2^j \|m_j'\|_2).$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\|m_j\|_2^2 &\leq \int_{2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}} |m(\xi)|^2 d\xi = \int_{2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^j} |m(\xi)|^2 d\xi + \int_{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j+1}} |m(\xi)|^2 d\xi \\ &\overset{\text{(H)}}{\leq} 2^{j-1}A^2 + 2^j A^2 = 2^j \times \frac{3}{2} A^2\end{aligned}$$

donc $\|m_j\|_2 \leq 2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A$ et, de même, $\|m'_j\|_2 \leq 2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A$.
On a finalement, pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |K_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}dx \leq 2^{-\frac{j}{2}}B_2\left(2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A + 2^j2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A\right)$$

ce qui assure le résultat avec $C_1 = \sqrt{6}B_2 > 0$.
• Étape 3 : $\exists C_2 > 0; \forall j \in \mathbb{Z}, 2^{-j}\int_R |K'_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}dx \leq C_2A$
Soit $j \in \mathbb{Z}$. Comme à l'étape 2, on a :

$$\begin{aligned}2^{-j}\int_{\mathbb{R}} |K'_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}dx &\leq 2^{-j}2^{-\frac{j}{2}}B_2\left(\|K'_j\|_2 + 2^j\left(\int_{\mathbb{R}}|K'_j(x)|^2|x|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\overset{\text{FP}}{=} 2^{-j}2^{-\frac{j}{2}}B_2\left(\|\cdot m_j\|_2 + 2^j\|m_j + \cdot m'_j\|_2\right)\\ &\leq 2^{-j}2^{-\frac{j}{2}}B_2\left(\|\cdot m_j\|_2 + 2^j\|m_j\|_2 + 2^j\|\cdot m'_j\|_2\right)\end{aligned}$$

avec $2^j\|m_j\|_2 \leq 2^j2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A$, $\int_{\mathbb{R}}|x|^2|m'_j(x)|^2dx \leq 4\times 2^{2j}\|m'_j\|_2^2$ et $\int_{\mathbb{R}}|x|^2|m_j(x)|^2dx \leq 4\times 2^{2j}\|m_j\|_2^2$, donc :

$$\begin{aligned}2^{-j}\int_{\mathbb{R}} |K'_j(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}dx &\leq 2^{-j}2^{-\frac{j}{2}}B_2\left(2\times 2^j2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A + 2^j2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A + 2\times 2^j2^{-\frac{j}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}A\right)\\ &= 5\sqrt{\frac{3}{2}}B_2A\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat en posant $C_2 = 5\sqrt{\frac{3}{2}}B_2$.
• Étape 4 : Condition de Hörmander : $\exists C_3 > 0; \forall y \in \mathbb{R}^*, \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_j(x-y) - K_j(x)| \leq C_3A$
Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{-k} \leq |y| \leq 2^{-k+1}$.
Puisque, pour tout $(x,z) \in (\mathbb{R}^*)^2$, si $|x| \geq 2|z|$, alors $|x| \geq |z|$ et $|x-z| \geq |z|$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j>k}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_j(x-y) - K_j(x)|dx &\leq \sum_{j>k}2\int_{|x|\geq|y|}|K_j(x)|dx\\ &\leq \sum_{j>k}2\int_{|x|\geq|y|}|K_j(x)|\frac{(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}}{(1+2^j|y|)^{\frac{1}{4}}}dx\\ &\overset{\text{Étape 2}}{\leq} \left(\sum_{j>k}\frac{2}{(1+2^j|y|)^{\frac{1}{4}}}\right)\times C_1A\\ &\leq C_1A\sum_{j>k}\frac{2}{(1+2^{j-k})^{\frac{1}{4}}} \leq D_1A\end{aligned}$$

avec $D_1 = 2C_1 \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{j}{4}}}$, et :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\leq k} \int_{|x|\geq 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)|dx &\leq \sum_{j\leq k} \int_{|x|\geq 2|y|} \int_0^1 |yK_j'(x-ty)|dtdx \\
&\leq 2^{-k+1} \sum_{j\leq k} \int_{|x|\geq 2|y|} \int_0^1 |K_j'(x-ty)|dtdx \\
&\overset{\text{FT}}{=} 2^{-k+1} \sum_{j\leq k} \int_0^1 \int_{|x|\geq 2|y|} |K_j'(x-ty)|dxdt \\
&\leq 2^{-k+1} \sum_{j\leq k} \int_0^1 \int_{|x|\geq 2|y|} |K_j'(x-ty)|(1+2^j|x-ty|)^{\frac{1}{4}}dxdt \\
&\leq 2^{-k+1} \sum_{j\leq k} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |K_j'(x)|(1+2^j|x|)^{\frac{1}{4}}dxdt \\
&\overset{\text{Étape 3}}{\leq} 2^{-k+1} \sum_{j\leq k} 2^j C_2 A = D_2 A
\end{aligned}$$

où $D_2 = 2C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty$.
On a alors le résultat avec $C_3 = D_1 + D_2$.
• Étape 5 : Si $2 \leq p < \infty$, l'ensemble $\mathcal{A} = \{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}); \mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset \mathbb{R}^* \text{ est compact}\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$
Supposons pour cette étape que $2 \leq p < +\infty$. Notons $q \in]1,2]$ l'exposant conjugué de p.
Par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), \|.\|_p)$. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Comme $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$, il existe $(g_n) \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}^*)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|g_n - \hat{f}\right\|_q = 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ donc il existe $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $g_n = \hat{f_n}$. D'après le corollaire 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\|f_n - f\|_p \leq \|\hat{f_n} - \hat{f}\|_q = \|g_n - \hat{f}\|_q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui assure la densité de $\mathcal{A}$ dans $L^p(\mathbb{R})$.
• Étape 6 : Conclusion
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_N = \sum\limits_{j=-N}^{N} m_j$ et $S_N = \sum\limits_{j=-N}^{N} K_j \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\|\sigma_N\|_\infty \leq \|m\|_\infty$ et $\hat{S_N} = \sigma_N$ donc, d'après le théorème de Fourier-Plancherel, on a :

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|T_{\sigma_N} f\|_2 = \|S_N * f\|_2 \leq \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

De plus, S_N vérifie la condition de Hörmander avec constante $C_3 A$ donc, d'après le théorème de Calderón-Zygmund, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in]1, +\infty[$ pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|T_{\sigma_N} f\|_q \leq 32(1 + \|m\|_\infty + C_3 A) \max\left(q, \frac{1}{q-1}\right) \|f\|_q \leq C_4 (A + \|m\|_\infty) \max\left(q, \frac{1}{q-1}\right) \|f\|_q$$

pour une certaine constante $C_4 > 0$.
Supposons pour l'instant $p \geq 2$. Pour toute $f \in \mathcal{A}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m\hat{f} = \sigma_N f$ et $T_m f = T_{\sigma_N} f$ donc, pour toute $f \in \mathcal{A}$, on a :

$$\|T_m f\|_p \leq C_4 (A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \|f\|_p.$$

L'étape 5 assure alors que le théorème de Mikhlin est démontré dans le cas où $2 \leq p < +\infty$. Montrons alors le résultat pour $p \in]1, 2[$. Notons q son exposant conjugué. On a $\max\left(q, \frac{1}{q-1}\right) \leq 2\max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$ car $\frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$ et $q = \frac{p}{p-1} \leq \frac{2}{p-1}$ donc, d'après la proposition 5, T_m s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même avec :

$$\|T_m\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} \leq C_4(A + \|m\|_\infty)\max\left(q, \frac{1}{q-1}\right) \leq 2C_4(A + \|m\|_\infty)\max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$$

ce qui assure le résultat avec $C = 2C_4$. $\square$

Ce théorème de Mikhlin fournit une condition suffisante pour qu'une fonction définisse un multiplicateur de Fourier. Le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz en fournit une autre. C'est ce théorème que nous allons démontrer dans la suite de ce mémoire. Pour cela, commençons par énoncer quelques résultats concernant la transformée de Hilbert.

2.4 Transformée de Hilbert

Ce premier lemme justifie l'utilisation de la théorie de Calderón-Zygmund dans la suite de cette partie.

Lemme 13. *L'application* $K : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\pi x} \end{array}\right.$ *est un noyau de Calderón-Zygmund.*

Démonstration. On note que K est localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$. Puisque (K1) et (K3) sont claires, il suffit de montrer que (K2) est vérifiée. Soit $y \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{1}{\pi}\int_{|x|>2|y|}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\right|dx = \frac{|y|}{\pi}\int_{|x|>2|y|}\frac{1}{|x||x-y|}dx \leq \frac{2|y|}{\pi}\int_{|x|>2|y|}\frac{1}{x^2}dx \overset{u=\frac{x}{|y|}}{=} \frac{2}{\pi}\int_{|u|>2}\frac{1}{u^2}du$$

donc (K2) est vérifiée. $\square$

Définition 11. *La transformée de Hilbert est l'opérateur de Calderón-Zygmund associée au noyau* $K : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{\pi x}$. *On note* $H = T_K$.

On dispose d'une expression plus simple de la transformée de Hilbert, donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 9. (i) *Pour toute* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, *on a :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, Hf(\xi) = (-i\operatorname{sgn}\hat{f})^\vee(\xi).$$

Cette égalité permet de définir H *sur* $L^2(\mathbb{R})$.
(ii) H *est une isométrie sur* $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. (i) • Commençons par montrer que, pour tout $0 < a < b < +\infty$, on a :

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq 4.$$

Soit $0 < a < b < +\infty$. Si $b \leq 1$, on a :

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx\right| = \int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx \leq \int_a^b dx = b - a \leq 1 \leq 4.$$

Si $a \geq 1$, on a :

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \overset{\text{IPP}}{=} \left|\left[\frac{-\cos(x)}{x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x}dx\right| \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \leq 3 \leq 4$$

et si $a \leq 1 \leq b$, on a :

$$\left|\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq \left|\int_a^1 \frac{\sin(x)}{x}dx\right| + \left|\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq 1 + 3 = 4$$

d'où le résultat.
• Montrons ensuite que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x}dx = \pi\,\mathrm{sgn}(b)$. Si $b = 0$, le résultat est immédiat. Soit donc $b \in \mathbb{R}^*$.
Si $b > 0$, grâce à la parité de l'intégrande et au changement de variable $u = bx$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = 2\frac{\pi}{2} = \pi\,\mathrm{sgn}(b)$$

et, pour les mêmes raisons, si $b < 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x}dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = -2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} = \pi\,\mathrm{sgn}(b).$$

• Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
Hf(\xi) &= H\hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}(\xi) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - y| > \varepsilon} \frac{1}{\pi(\xi - y)} \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}(y)dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |\xi - y| > \varepsilon} \frac{1}{\pi(\xi - y)} \hat{\hat{\hat{f}}}(-y)dy \\
&\overset{u = \xi - y}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |u| > \varepsilon} \frac{1}{\pi u} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{-2i\pi t(u - \xi)}dtdu \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2i\pi t\xi} \int_{\frac{1}{\varepsilon} > |u| > \varepsilon} \frac{\sin(tu)}{u}dudt \text{ par Fubini car } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Or $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et, d'après ce qu'on a montré précédemment :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|\int_{\frac{1}{\varepsilon} > |u| > \varepsilon} \frac{\sin(tu)}{u}du\right| = 2\left|\int_{|t|\varepsilon}^{\frac{|t|}{\varepsilon}} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq 8$$

donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
Hf(\xi) &= -\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2i\pi t\xi} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}>|u|>\varepsilon} \frac{\sin(tu)}{u} du dt \\
&= -\frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2i\pi t\xi}\pi\operatorname{sgn}(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} -i\operatorname{sgn}(t)\hat{f}(t)e^{2i\pi\xi t}dt \\
&= (-i\operatorname{sgn}\hat{f})^{\vee}(\xi)
\end{aligned}$$

d'où le résultat.
(ii) Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, par Fourier-Plancherel, on déduit de (i) que :

$$\|Hf\|_2 = \|-i\operatorname{sgn}\hat{f}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

d'où le résultat. □

Notations 4. *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $D_a f = f(a\cdot)$.*

La proposition suivante fournit une caractérisation de la transformée de Hilbert :

Proposition 10. *La transformée de Hilbert est, à un facteur multiplicatif près, l'unique multiplicateur de Fourier T_ϕ sur $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :*

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, T_\phi D_a = \operatorname{sgn}(a) D_a T_\phi \quad (*).$$

Démonstration. • Montrons que H vérifie $(*)$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}^{-*}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
HD_a f(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -i\operatorname{sgn}(t)\widehat{D_a f}(t)e^{2i\pi\xi t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} -i\operatorname{sgn}(t)\left(\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-2i\pi\frac{t}{a}u}\frac{du}{a}\right)e^{2i\pi\xi t}dt \\
&\overset{y=\frac{t}{a}}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} -i(-\operatorname{sgn}(y))\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi yu}du\right)e^{2i\pi\xi ay}dy \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} -i\operatorname{sgn}(y)\hat{f}(y)e^{2i\pi y(a\xi)}dy \\
&= \operatorname{sgn}(a)D_a Hf(\xi).
\end{aligned}$$

Par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et continuité des opérateurs H et D_a, $a \in \mathbb{R}$, sur $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}^{-*}$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$HD_a f(\xi) = \operatorname{sgn}(a)D_a Hf(\xi).$$

De même, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$HD_a f(\xi) = \operatorname{sgn}(a)D_a Hf(\xi)$$

donc H vérifie $(*)$.
• Soit $T_\phi \in \mathscr{M}_2$ vérifiant $(*)$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$. On a vu dans le point précédent que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \widehat{D_a f}(y) = \mathrm{sgn}(a)\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Donc, par $(*)$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour λ-presque-tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(y)\frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right) = \widehat{T_\phi D_a f}(y) = \mathrm{sgn}(a)\widehat{D_a T_\phi f}(y) = \frac{\mathrm{sgn}(a)}{|a|}\widehat{T_\phi f}\left(\frac{y}{a}\right) = \mathrm{sgn}(a)\phi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right)$$

d'où, pour λ-presque-tout $y \in \mathbb{R}$, $\phi(y) = \mathrm{sgn}(a)\phi\left(\frac{y}{a}\right)$ (Δ).
Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, posons $\psi(t) = \int_0^t \phi(y)dy$. Pour tout $a > 0$, pour tout $t > 0$, on a :

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(y)dy = \int_0^t \mathrm{sgn}(a)\phi\left(\frac{y}{a}\right)dy \overset{u=y/a}{=} a\int_0^{\frac{t}{a}} 1 \times \phi(u)du = a\psi\left(\frac{t}{a}\right).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\psi(t) = t\psi(1)$. Or, d'après le théorème de différentiation de Lebesgue, ψ est dérivable et, pour λ-presque-tout $y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\phi(y) = \psi'(y) = \mathrm{sgn}(y)\psi(1).$$

D'où, pour λ-presque-tout $y \in \mathbb{R}^{-*}$:

$$\phi(y) = \mathrm{sgn}(-1)\phi(-y) = -\psi(1) = \mathrm{sgn}(y)\psi(1)$$

ce qui assure que, pour λ-presque-tout $y \in \mathbb{R}$, $\phi(y) = \psi(1)\,\mathrm{sgn}(y)$, d'où le résultat. □

Le résultat fondamental concernant la transformée de Hilbert est le suivant :

Théorème 17 (Riesz)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[$. On a :*

$$H \in \mathscr{M}_p \text{ et } \|H\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})} \leq C\max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$$

avec $C > 0$.

Démonstration. Comme H définit une isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$, d'après la preuve du théorème 15, il suffit de montrer que H vérifie les hypothèses du théorème 14. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * \rho_n - f\|_2 = 0$ donc, par continuité de H et d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une sous-suite $(H(f * \rho_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(H(f * \rho_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{k\to\infty} H(f * \rho_{n_k})(x) = H(f)(x).$$

Considérons $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{k\to\infty} H(f * \rho_{n_k})(x) = H(f)(x)$ et $x \notin \mathrm{Supp}(f)$.
Comme $d(x, \mathrm{Supp}(f)) > 0$ (car $\mathrm{Supp}(f)$ est fermé) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{Supp}(f * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right],$$

il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $x \notin \operatorname{Supp}(f * \rho_{n_k})$. Or, pour tout $k \geq k_0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(x-y)} \mathbb{1}_{A_{n_{k_0}}}(y) f * \rho_{n_k}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(x-y)} f * \rho_{n_k}(y) dy = H(f * \rho_{n_k})(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} H(f)(x)$$

où $A_{n_{k_0}} = \operatorname{Supp}(f) + \left[-\frac{1}{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}\right]$.
Or $y \mapsto \frac{1}{\pi(x-y)} \mathbb{1}_{A_{n_{k_0}}}(y) \in L^2(\mathbb{R})$ donc, par Cauchy-Schwarz, on a :

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(x-y)} \mathbb{1}_{A_{n_{k_0}}}(y) f * \rho_{n_k}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(x-y)} f(y) dy$$

d'où, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, pour presque-tout $x \notin \operatorname{Supp}(f)$:

$$H(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(x-y)} f(y) dy$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 15. *On aurait pu appliquer le théorème de Mikhlin. En effet, la fonction* m : $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{C} \\ \xi \mapsto -i \operatorname{sgn}(\xi) \end{array}\right.$ *est bornée de classe* C^1 *et, pour tout* $R > 0$*, on a :*

$$\frac{1}{R} \int_{R \leq |\xi| \leq 2R} |m(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{2}{R} \times R = 2$$

et :

$$R \int_{R \leq |\xi| \leq 2R} |m'(\xi)|^2 d\xi = 0 \leq 2$$

donc vérifie les hypothèses du théorème de Mikhlin.

2.5 Théorie de Littlewood-Paley

En plus de la théorie de Calderón-Zygmund, nous allons utiliser la théorie de Littlewood-Paley, développée par John Edensor Littlewood et Raymond Paley.

Lemme 14. *Soit* $I =]a, b[$ *un intervalle non vide de* $\mathbb{R}$.
Pour tout $p \in]1, +\infty[$, Δ_I *s'étend en un opérateur borné de* $L^p(\mathbb{R})$ *dans lui-même, avec :*

$$\|\Delta_I\|_{L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})} \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$$

où C *est une constante strictement positive.*

Démonstration. Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour toute $f \in L^p(\mathbb{R})$, on pose $R_\theta f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi\theta x} f(x)$.
Pour toute $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_I(\xi) = \frac{\operatorname{sgn}(\xi-a) - \operatorname{sgn}(\xi-b)}{2}$ donc, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_I f(x) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi - a) \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi - b) \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi + a) e^{2i\pi ax} e^{2i\pi x\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi + b) e^{2i\pi bx} e^{2i\pi x\xi} d\xi \\
&= \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} (-i) \operatorname{sgn}(\xi) (\widehat{e^{-2i\pi a \cdot} f})(\xi) e^{2i\pi ax} e^{2i\pi x\xi} d\xi - \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} (-i) \operatorname{sgn}(\xi) (\widehat{e^{-2i\pi b \cdot} f})(\xi) e^{2i\pi bx} e^{2i\pi x\xi} d\xi \\
&= \frac{i}{2} (R_a H R_{-a} - R_b H R_{-b}) f(x).
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ est une isométrie de $L^p(\mathbb{R})$ donc le théorème 17 assure le résultat. $\square$

2.5.1 Version annulaire lisse

La preuve du théorème de Littlewood-Paley pour des fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ requiert plusieurs résultats intermédiaires. Commençons par introduire certaines notations.

Considérons $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
— $\mathrm{Supp}(\psi) \subset \left[-4, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 4\right]$;

— $\psi \equiv 1$ sur $[-2, -1] \cup [1, 2]$.
Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, posons $\psi_j = \psi(2^{-j}\cdot)$ et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on note $\tilde{\Delta}_j f := (\psi_j \hat{f})^\vee = f * \psi_j^\vee$. Puisque, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $\|\tilde{\Delta}_j f\|_p \leq \|f\|_p \|\psi_j^\vee\|_1$, $\tilde{\Delta}_j$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, posons $\tilde{S}f = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\tilde{\Delta}_j f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Avant d'obtenir une première version du théorème de Littlewood-Paley, prouvons le résultat classique suivant :

Lemme 15 (Inégalités de Khintchine)**.** *Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi de Rademacher sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.*
Pour tout $p \in]0, +\infty[$, il existe des constantes $A_p, B_p \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N$, on ait :

$$A_p \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N a_i\varepsilon_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, pour $p \geq 2$, on peut choisir $B_p \leq \sqrt{p}$.

Démonstration. Pour tout $p \in [2, +\infty[$, on pose $A_p = 1$ et $B_p = \sqrt{p}$. Pour tout $p \in]0, 2[$, on pose $B_p = 1$ et $A_p = B_p^{-\frac{\theta}{1-\theta}}$, où $\theta \in]0, 1[$ est tel que $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$.
• Commençons par noter que, pour tout $p \in]0, 2[$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N a_i\varepsilon_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N a_i\varepsilon_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j\overline{a_k}\varepsilon_j\varepsilon_k\right) \\
&\overset{\perp}{=} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \mathbb{E}(\varepsilon_j^2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j\in[|1,n|]\setminus\{i\}} a_i\overline{a_j}\mathbb{E}(\varepsilon_i)\mathbb{E}(\varepsilon_j) \\
&= B_p \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et :

$$\forall p \in]0, 2[, \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N, A_p \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N a_i\varepsilon_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^N a_i\varepsilon_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• Soit $p \in [2, +\infty[$. Il existe $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ tel que $2(q-1) \leq p < 2q$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. Pour tout $k \in [|1, N|]$, on note α_k la partie réelle de a_k et β_k sa partie imaginaire. On pose :

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k \text{ et } Y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k \text{ et } Z = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varepsilon_k.$$

Montrons que $\|Y\|_{2q} \leq \sqrt{q}\|Y\|_2$. Par la formule du binôme généralisée, on a :

$$Y^{2q} = \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varepsilon_n\right)^{2q} = \sum_{\substack{(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in [|0, 2q|]^N \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_N = 2q}} \frac{(2q)!}{\gamma_1! \cdots \gamma_N!} \varepsilon_1^{\gamma_1} \cdots \varepsilon_N^{\gamma_N} \alpha_1^{\gamma_1} \cdots \alpha_N^{\gamma_N}$$

Or, pour tout $(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in [|0, 2q|]^N$, par indépendance des variables aléatoires, on a :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_1^{\gamma_1} \cdots \varepsilon_N^{\gamma_N}) = \mathbb{E}(\varepsilon_1^{\gamma_1}) \cdots \mathbb{E}(\varepsilon_N^{\gamma_N}) = \begin{cases} 1 & \text{si tous les } \gamma_i \text{ sont pairs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^{2q}) &= \sum_{\substack{(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in [|0, q|]^N \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_N = q}} \frac{(2q)!}{(2\gamma_1)! \cdots (2\gamma_N)!} \alpha_1^{2\gamma_1} \cdots \alpha_N^{2\gamma_N} \\
&\leq \sum_{\substack{(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in [|0, q|]^N \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_N = q}} \frac{(2q)!}{2^{\gamma_1}\gamma_1! \cdots 2^{\gamma_N}\gamma_N!} \alpha_1^{2\gamma_1} \cdots \alpha_N^{2\gamma_N} \\
&= \frac{(2q)!}{2^q q!} \sum_{\substack{(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in [|0, q|]^N \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_N = q}} \frac{q!}{\gamma_1! \cdots \gamma_N!} (\alpha_1^2)^{\gamma_1} \cdots (\alpha_N^2)^{\gamma_N} \\
&= \frac{(2q)!}{2^q q!} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\right)^q = \frac{(2q) \cdots (q+1)}{2^q} \mathbb{E}(Y^2)^q \\
&\leq \frac{(2q)^q}{2^q} \mathbb{E}(Y^2)^q = q^q \mathbb{E}(Y^2)^q
\end{aligned}$$

d'où $\|Y\|_{2q} \leq \sqrt{q}\|Y\|_2 \leq \sqrt{p}\|Y\|_2$ car $q \leq \frac{p}{2} + 1 \leq p$. De même, $\|Z\|_{2q} \leq \sqrt{q}\|Z\|_2 \leq \sqrt{p}\|Z\|_2$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\|X\|_p &= \mathbb{E}\left((|X|^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \mathbb{E}\left((Y^2 + Z^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \|Y^2 + Z^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\|Y^2\|_{\frac{p}{2}} + \|Z^2\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|Y\|_p^2 + \|Z\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\|Y\|_{2q}^2 + \|Z\|_{2q}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(B_p^2\|Y\|_2^2 + B_p^2\|Z\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(B_p^2\|X\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = B_p\|X\|_2
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité de droite, le cas $p \in]0, 2[$ ayant déjà été traité.

• Soit $p \in]0, 2|$, $N \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. On pose $X = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k$. Seule l'inégalité $A_p\|X\|_2 \leq \|X\|_p$ reste à démontrer. Soit $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{4}$. D'après l'inégalité d'interpolation, on a :

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_p^{1-\theta}\|X\|_4^{\theta} \leq \|X\|_p^{1-\theta} B_4^{\theta}\|X\|_2^{\theta}$$

d'où $\|X\|_2 \leq B_4^{\frac{\theta}{1-\theta}}\|X\|_p$, *i.e* $A_p\|X\|_2 \leq \|X\|_p$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 11 (Littlewood-Paley). *Soit $p \in]1,+\infty[$. Il existe $C_p > 0$ tel que :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|\tilde{S}f\|_p \leq C_p \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \|f\|_p.$$

Démonstration. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite iid de variables aléatoires de loi de Rademacher. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$\tilde{T}_\omega^N f(x) = \sum_{j=-N}^{N} \varepsilon_j(\omega)\tilde{\Delta} f(x).$$

D'après le lemme 15, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\sum_{j=-N}^{N} |\tilde{\Delta}_j f(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{1}{A_p}\mathbb{E}\left(\left|\tilde{T}_\cdot^N f(x)\right|^p\right)$$

donc, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{S}f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \liminf_{N\to\infty} \left(\sum_{j=-N}^{N} |\tilde{\Delta}_j f(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq \frac{1}{A_p}\int_{\mathbb{R}} \liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\left|\tilde{T}_\cdot^N f(x)\right|^p\right) dx \\
&\leq \frac{1}{A_p}\liminf_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\left|\tilde{T}_\cdot^N f(x)\right|^p\right) dx \text{ par le lemme de Fatou} \\
&= \frac{1}{A_p}\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{T}_\cdot^N f(x)\right|^p dx\right) \text{ par Fubini-Tonelli.}
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\|\tilde{T}_\omega^N f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \Omega$. Posons $m_\omega^N = \sum\limits_{j=-N}^{N} \varepsilon_j(\omega)\psi_j$.

- $m_\omega^N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est bornée de classe C^1 avec $\|m_\omega^N\|_\infty \leq 3$.
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\text{Supp}(\psi_j) \subset [-2^{j+2}, -2^{j-1}] \cup [-2^{j-1}, 2^{j+2}]$.

Soit $R > 0$.

$*$ Si $2^{N+2} \leq R$, alors $\frac{1}{R}\int_{R\leq|\xi|\leq 2R} |m_\omega^N(\xi)|^2 d\xi = 0$;

$*$ Si $2R \leq 2^{-N-1}$, alors $\frac{1}{R}\int_{R\leq|\xi|\leq 2R} |m_\omega^N(\xi)|^2 d\xi = 0$;

$*$ Sinon, il existe $j_0 \in [|-N, N|]$ tel que $2^{j_0} \leq |\xi| \leq 2^{j_0+1}$. Comme, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ vérifiant $R \leq |\xi| \leq 2R$, $|m_\omega^N(\xi)| \leq 3$, on a :

$$\frac{1}{R}\int_{R\leq|\xi|\leq 2R} |m_\omega^N(\xi)|^2 d\xi \leq 9 \times \frac{1}{R} \times 2R = 18.$$

- Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\text{Supp}(\psi_j') \subset [-2^{j+2}, -2^{j+1}] \cup [-2^j, -2^{j-1}] \cup [2^{j-1}, 2^j] \cup [2^{j+1}, 2^{j+2}]$, et, comme précédemment, pour tout $R > 0$:

$*$ Si $2^{N+2} \leq R$ ou $2R \leq 2^{-N-1}$, alors $R \int_{R \leq |\xi| \leq 2R} |(m_\omega^N)'(\xi)|^2 d\xi = 0$;
$*$ Sinon, il existe $j_0 \in [|-N, N|]$ tel que $2^{j_0} \leq |\xi| \leq 2^{j_0+1}$. Comme, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ vérifiant $R \leq |\xi| \leq 2R$, $|(m_\omega^N)'(\xi)| \leq 2(2^{-j_0-1} + 2^{-j_0+1}) = 2^{-j_0} \times 5 \leq \frac{10}{R}$, on a :

$$R \int_{R \leq |\xi| \leq 2R} |(m_\omega^N)'(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{100}{R^2} \times R \times 2R = 200.$$

Le théorème de Mikhlin assure alors le résultat. □

2.5.2 Version non lisse

Utilisons ce résultat pour obtenir une version non lisse du théorème de Littlewood-Paley.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, notons $I_j = [2^j, 2^{j+1}] \cup [-2^{j+1}, -2^j]$ et $\Delta_j = \Delta_{I_j}$. On rappelle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_j \equiv 1$ sur I_j.

Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on pose $Sf = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

On admet le lemme suivant, qui nécessite une version vectorielle du théorème de Calderón-Zygmund.

Lemme 16. *Soit $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $p \in]1, +\infty[$. On a :*

$$\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

où C est une constante strictement positive.

Théorème 18 (Littlewood-Paley)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :*

$$\frac{\|f\|_p}{C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2} \leq \|Sf\|_p \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f\|_p$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\tilde{\Delta}_j f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et :

$$\widehat{\Delta_j \tilde{\Delta}_j f} = \mathbb{1}_{I_j} \widehat{\tilde{\Delta}_j f} = \mathbb{1}_{I_j} \psi_j \hat{f} = \widehat{\Delta_j f}$$

donc, par injectivité de la transformée de Fourier, $\Delta_j \tilde{\Delta}_j f = \Delta_j f$.
On en déduit, grâce au lemme 16 et à la proposition 11, qu'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que,

pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\begin{aligned}
\|Sf\|_p &= \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&= \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j (\tilde{\Delta}_j f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C_1 \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C_1 C_2 \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f\|_p.
\end{aligned}$$

On pose $C = 4C_1C_2$. Il reste à montrer que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\frac{\|f\|_p}{C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2} \leq \|Sf\|_p.$$

Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On note q l'exposant conjugué de p. Montrons que :

$$\forall g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|g\|_q \leq 1 \implies |\langle f, g\rangle| \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|Sf\|_p.$$

Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|g\|_q \leq 1$. Comme les I_j, $j \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints, d'après le théorème de Fourier-Plancherel, on a :

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{FP}}{=} \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \mathbb{1}_{I_j}\hat{f}, \mathbb{1}_{I_j}\hat{g}\rangle \overset{\text{FP}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \Delta_j f, \Delta_j g\rangle$$

donc :

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \||\Delta_j f||\Delta_j g|\|_1 \\
&= \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f||\Delta_j g| \right\|_1 \quad \text{par Beppo-Lévi} \\
&\leq \||Sf||Sg|\|_1 \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \|Sf\|_p \|Sg\|_q \text{ par Hölder} \\
&\leq C_1 C_2 \max\left(q, \frac{1}{q-1}\right)^2 \|g\|_q \|Sf\|_p \text{ par ce qui précède} \\
&\leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|Sf\|_p
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. $\square$

2.5.3 Version $L^p(\mathbb{R})$

On peut enfin montrer la version du théorème de Littlewood-Paley utilisée dans la preuve du théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz.

Théorème 19 (Littlewood-Paley). *Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour toute $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a :*

$$\frac{\|f\|_p}{C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2} \leq \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f\|_p$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

• Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Commençons par montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = 0.$$

D'après la deuxième inégalité triangulaire et l'équivalence des normes en dimension finie, il existe $C' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C' \sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f - \Delta_j f_n|$$

donc :

$$\left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C' \sum_{j=-N}^{N} \|\Delta_j f - \Delta_j f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

par continuité des Δ_j, $j \in [|-N, N|]$ sur $L^p(\mathbb{R})$.
On en déduit que :

$$\left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = \lim_{n\to+\infty} \left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

• Or, d'après le théorème 18, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j f_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f\|_p.$$

D'où, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\| \left(\sum_{j=-N}^{N} |\Delta_j f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f\|_p.$$

• Comme le théorème de convergence monotone assure que :

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\left(\sum_{j=-N}^{N}|\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p=0$$

on en déduit que :

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leq C\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)^2\|f\|_p.$$

• Montrons désormais l'autre inégalité. On note q l'exposant conjugué de p. Remarquons déjà que :

$$\{g\in L^q(\mathbb{R});\|g\|_q\leq 1\}\subset\left\{g\in L^q(\mathbb{R});\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q\leq 4C\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)^2\right\}$$

car $\max\left(q,\frac{1}{q-1}\right)\leq 2\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)$.
Soit $g\in L^q(\mathbb{R})$. Montrons que :

$$\langle f,g\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j f,\Delta_j f\rangle.$$

Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_p=0\text{ et }\lim_{n\to+\infty}\|g_n-g\|_q=0.$$

∗ On a vu dans la preuve du théorème 18 que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\langle f_n,g_n\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j f_n,\Delta_j g_n\rangle;$$

∗ Par bilinéarité du crochet de dualité, $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle f_n,g_n\rangle=\langle f,g\rangle$;
∗ Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{j=-N}^{N}|(\Delta_j f_n)(\Delta_j g_n)-(\Delta_j f)(\Delta_j g)|d\lambda=0$$

donc, d'après le théorème de Beppo-Lévi, on a :

$$\langle f,g\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j f,\Delta_j g\rangle.$$

• On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \sup\left\{\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\langle\Delta_j f,\Delta_j g\rangle\right|; g\in L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q\le 1\right\}\\
&\overset{\text{IT}}{\le} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f(x)||\Delta_j g(x)|dx; g\in L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q\le 1\right\}\\
&\overset{\text{CS}}{\le} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx; g\in L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q\le 1\right\}\\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \sup\left\{\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q; g\in L^q(\mathbb{R}), \|g\|_q\le 1\right\}\\
&\le 4C\max\left(p,\frac{1}{p-1}\right)^2\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat. □

2.6 Théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz

Avant d'énoncer le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz, introduisons l'intégrale de Bochner, qui permet d'intégrer des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

2.6.1 Intégrale de Bochner

Dans cette sous-partie, (Ω,Σ,μ) désigne un espace mesuré σ-fini complété et $(X,\|.\|)$ un espace de Banach.

Définition 12. *Soit $f:\Omega\to X$ une application.*
• *On dit que f est une fonction étagée s'il existe $n\in\mathbb{N}^*$, $(x_1,\cdots,x_n)\in X^n$, $(A_1,\cdots,A_n)\in\Sigma^n$ tels que $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbb{1}_{A_i}$.*
• *On dit que f est une fonction mesurable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées qui converge μ-presque-partout vers f.*

La première proposition ci-dessous affirme que cette définition de fonction mesurable coïncide avec la définition habituelle lorsque l'espace de Banach X est séparable.

Proposition 12. *Soit $f:\Omega\to X$ une application.*
Cette application f est mesurable si et seulement si il existe $g:\Omega\to X$ vérifiant :
(i) $f=g$ μ-presque-partout ;
(ii) pour tout sous-ensemble ouvert A de X, $g^{-1}(X)\in\Sigma$;
(iii) $g(\Omega)$ est un sous-ensemble séparable de X.

Démonstration. • Supposons f mesurable. Par définition, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées qui converge μ-presque-partout vers f. Notons g la limite simple de la suite

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a $f = g$ μ-presque-partout. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$f_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}.$$

Posons $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{Vect}\{x_i^n, 1 \leq i \leq k_n\}$ qui est dénombrable. On a alors $g(\Omega) \subset \overline{F}$, ce qui prouve (iii).
Soit A un sous-ensemble ouvert de X. Montrons que $g^{-1}(A) \in \Sigma$.
Posons $F = X\backslash A$. Pour tout $\omega \in \Omega$, comme l'application $x \to d(x, F)$ est continue, on a :

$$\begin{aligned} g(\omega) \in A &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; d(g(\omega), F) \geq 2^{-n} \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*; \lim_{k\to\infty} d(f_k(\omega), F) \geq 2^{-n} \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists r \geq 1, \exists K \geq 1; \forall k \geq K, d(f_k(\omega), F) \geq 2^{-n} + 2^{-r} \end{aligned}$$

donc :

$$g^{-1}(A) = \bigcup_{n\geq1} \bigcup_{r\geq1} \bigcup_{K\geq1} \bigcap_{k\geq K} \{\omega \in \Omega; d(f_k(\omega), F) \geq 2^{-n} + 2^{-r}\}.$$

Il suffit alors de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$\begin{cases} (\Omega, \Sigma) & \to & (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \\ \omega & \mapsto & d(f_k(\omega), F) \end{cases}$$

est mesurable. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Or, la fonction :

$$\begin{cases} (\Omega, \Sigma) & \to & (X, \mathscr{B}(X)) \\ \omega & \mapsto & f_k(\omega) \end{cases}$$

est mesurable, et la fonction :

$$\begin{cases} (X, \mathscr{B}(X)) & \to & (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \\ x & \mapsto & d(x, F) \end{cases}$$

est continue donc mesurable, ce qui assure le résultat.
• Supposons qu'il existe $g : \Omega \to X$ vérifiant les points (i) à (iii).
$*$ Commençons par supposer que $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (iii), il existe $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset g(\Omega)$ dense dans $g(\Omega)$, et, d'après (ii), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{\omega \in \Omega; \|g(\omega) - x_n\| < \varepsilon\} \in \Sigma$. Posons $B_1 = A_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \Sigma$. On note que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ puisque $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $g(\Omega)$. Or on a supposé $\mu(\Omega) < +\infty$ et les B_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux disjoints donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \varepsilon$.
On en déduit que, si $h = \sum_{n=1}^{N} x_n \mathbb{1}_{B_n}$ et $E = \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} B_n \in \Sigma$, alors h est une fonction étagée, $\mu(E) \leq \varepsilon$ et $\|g - h\| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus E$.
$*$ Traitons désormais le cas général. Comme (Ω, Σ, μ) est σ-fini, il existe une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \Sigma$ telle que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(\Omega_n) < +\infty$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $E_n \in \Sigma$ et une fonction étagée h_n tels que $E_n \subset \Omega_n$, $\mu(E_n) \leq 2^{-n}$ et

$\|g-h_n\| < 2^{-n}$ sur $\Omega_n \backslash E_n$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} E_k \in \Sigma$ et $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \in \Sigma$.
On note que $\mu(F) = 0$ et que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus F$, on a :

$$\|h_n(\Omega) - g(\omega)\| \leq 2^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui assure que f est mesurable car $f = g$ μ-presque-partout. □

On peut désormais définir les fonctions Bochner intégrables.

Définition 13. *On dit qu'une fonction $f : \Omega \to X$ est étagée et intégrable s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$ et $(A_1, \cdots, A_n) \in \Sigma_n$ tels que, pour tout $i \in [|1, n|]$, $\mu(A_i) < +\infty$ et $f = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}$. On pose alors :*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) x_i.$$

Remarque 16. *On note que, pour toute fonction $f : \Omega \to X$ étagée et intégrable, on a :*

$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| d\mu.$$

Définition 14. *On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to X$ est Bochner intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées et intégrables telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f μ-presque-partout et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$. On note alors $f \in L^1(\Omega, X)$.*
Par complétude de X, on note que la suite $\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ choisie. On note alors :

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Remarque 17. *Remarquons que, pour $f : \Omega \to X$ Bochner intégrable, en passant à la limite dans la remarque 16, on a :*

$$\left\| \int_\Omega f d\mu \right\| \leq \int_\Omega \|f\| d\mu.$$

Le théorème suivant fournit une caractérisation simple des fonctions Bochner intégrables, similaire à la définition des fonctions Lebesgue-intégrables.

Théorème 20. *Soit $f : \Omega \to X$ une fonction mesurable.*
La fonction f est Bochner intégrable si et seulement si $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.

Démonstration. • Supposons $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.
D'après le preuve de la proposition 12, il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées et intégrables telle que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers f μ-presque-partout. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \{\omega \in \Omega; \|h_n(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\|\} \in \Sigma$ et $g_n = h_n \mathbb{1}_{A_n}$. On note que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions étagées et intégrables qui converge vers f μ-presque-partout. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|g_n - g\| \leq \|g_n\| + \|f\| \leq 3\|f\|$$

avec $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$ donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \|g_n - g\| d\mu = 0$$

ce qui assure le résultat.
• Supposons f Bochner intégrable.
Par définition, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées et intégrables telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f μ-presque-partout et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0$.
Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\int_\Omega \|f - f_N\| \leq 1$. On a alors :

$$\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_N\| d\mu + \int_\Omega \|f_N\| d\mu \leq 1 + \int_\Omega \|f_N\| d\mu < +\infty$$

ce qui assure que $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$. □

2.6.2 Extensions vectorielles d'opérateurs de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$

Afin de prouver l'inégalité du corollaire 5 utilisée dans la preuve du théorème de Marcinkiewicz, montrons les résultats intermédiaires ci-dessous.

Lemme 17. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On pose $X = L^p(\Omega, \mu)$. Dans ce cas, $L^p(\mathbb{R}, X) = L^p(\mathbb{R} \times \Omega, \lambda \otimes \mu)$.*
Si $T \in B(L^p(\mathbb{R}))$, alors l'opérateur :

$$T \otimes Id_X : \left\{ \begin{array}{ccc} L^p(\mathbb{R}) \otimes X & \to & L^p(\mathbb{R}, X) \\ \sum_{j=1}^m f_j x_j & \mapsto & \sum_{j=1}^m T(f_j) x_j \end{array} \right.$$

s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}, X)$ dans lui-même, et $\|T \otimes Id_X\| = \|T\|$.

Démonstration. Cela découle du théorème de Fubini-Tonelli.
En effet, pour tout $f = \sum\limits_{j=1}^m f_j x_j \in L^p(\mathbb{R}) \otimes X$, on a :

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R},X)} &= \left(\int_\mathbb{R} \left\| \sum_{j=1}^m T(f_j)(x) x_j \right\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{FT}}{=} \left(\int_\Omega \int_\mathbb{R} \left| \sum_{j=1}^m T(f_j)(x) x_j(\omega) \right|^p dx d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left\| T\left(\sum_{j=1}^m x_j(\omega) f_j \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\|T\|^p \left\| \sum_{j=1}^m x_j(\omega) f_j \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{FT}}{=} \|T\| \left\| \sum_{j=1}^m f_j x_j \right\|_{L^p(\mathbb{R},X)}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme 18. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p([0,1]) = L^p([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Il existe une isométrie linéaire de ℓ^2 dans $L^p([0,1])$.*

Démonstration. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des variables iid de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Posons :

$$G : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell^2 & \to & L^p([0,1]) \\ (\lambda_n = a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \frac{1}{\alpha_p} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(g_n + i\tilde{g_n}) \end{array} \right. , \text{ où } \alpha_p = \|g_0\|_p.$$

Soit $(\lambda_n = a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $n \geq m \geq 0$. On a :

$$\left\| \frac{1}{\alpha_p} \sum_{k=m}^{n} (a_k + ib_k)(g_k + i\tilde{g_k}) \right\|_p = \left\| \frac{1}{\alpha_p} \sum_{k=m}^{n} (a_k g_k - b_k \tilde{g_k} + i(a_k \tilde{g_k} + b_k g_k)) \right\|_p$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k g_k - b_k \tilde{g_k} + i(a_k \tilde{g_k} + b_k g_k)$ suit une loi normale centrée et de variance :

$$\sigma_k^2 = \begin{pmatrix} a_k + ib_k & -b_k + ia_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k - ib_k \\ -b_k - ia_k \end{pmatrix} = |\lambda_k|^2$$

d'où :

$$\left\| \frac{1}{\alpha_p} \sum_{k=m}^{n} (a_k + ib_k)(g_k + i\tilde{g_k}) \right\|_p = \frac{1}{\alpha_p} \left(\sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_p = \left(\sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui assure que G est bien définie et que c'est une isométrie puisqu'elle est linéaire. $\square$

Lemme 19. *Soit $H \neq \{0\}$ un espace de Hilbert, $p \in [1, +\infty[$, $T \in B(L^p(\mathbb{R}))$. $T \otimes Id_H$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}, H)$ et $\|T \otimes Id_H\| = \|T\|$.*

Démonstration. • Cas où H est séparable
On peut alors supposer $H = \ell_2$. Notons G une isométrie linéaire de ℓ^2 dans $L^p([0,1])$, donnée par le lemme 18. On note encore G l'application G rendue surjective. Montrons que :

$$T \otimes Id_H = (Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G^{-1}) \circ (T \otimes I_{L^p(\mathbb{R})}) \circ (Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G).$$

Soit $f = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k x_k \in L^p(\mathbb{R}) \otimes H$. On a :

$$\begin{aligned} (Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G^{-1}) \circ (T \otimes I_{L^p(\mathbb{R})}) \circ (Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G)(f) &= (Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{m} T(f_k) G(x_k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} T(f_k) x_k \\ &= (T \otimes Id_{\ell^2}) \left(\sum_{k=1}^{m} f_k x_k \right) \end{aligned}$$

ce qui assure l'égalité.
D'après le lemme 17, $T \otimes Id_{L^p(\mathbb{R})}$ est un opérateur borné donc il suffit de montrer que $Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes$

G^{-1} et $Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G$ sont des isométries.
Pour toute $f = \sum_{k=1}^{m} f_k x_k \in L^p(\mathbb{R}) \otimes \ell^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G(f)\|_{L^p(\mathbb{R}, L^p([0,1]))} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{k=1}^{m} f_k(t) G(x_k) \right\|_{L^p([0,1])}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| G\left(\sum_{k=1}^{m} f_k(t) x_k \right) \right\|_{L^p([0,1])}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \sum_{k=1}^{m} f_k(t) x_k \right\|_{\ell^2}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{car } G \text{ est isométrique} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{m} f_k x_k \right\|_{L^p(\mathbb{R}, \ell^2)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}, \ell^2)}
\end{aligned}$$

donc $Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G$ est une isométrie.
De même, $Id_{L^p(\mathbb{R})} \otimes G^{-1}$ est une isométrie, ce qui assure le résultat dans le cas où H est séparable.
• Cas général
Le premier cas assure que, pour tout sous-espace $E \subset H$ séparable, $T \otimes Id_E$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}, E)$ avec $\|T \otimes Id_E\| = \|T\|$, ce qui permet de conclure car, pour toute $f = \sum_{k=1}^{m} f_k x_k \in L^p(\mathbb{R}) \otimes H$, l'espace $\mathrm{Vect}\{x_k, k \in [|1, m|]\}$ est séparable. □

On en déduit le résultat suivant pour les fonctions de $L^p(\mathbb{R}) \otimes H$, et nous admettons le résultat dans le cas général.

Corollaire 5. *Soit $p \in [1, +\infty[$, $T \in B(L^p(\mathbb{R}))$. Si $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ où μ est une mesure σ-finie, on a :*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}, H), \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |T(f_t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, \lambda)} \leq \|T\| \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_t|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, \lambda)}$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a posé $f_t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (f(x))(t) \end{array} \right.$.

Démonstration. Faisons-le seulement pour $f = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i \in L^p(\mathbb{R}) \otimes H$. D'après le lemme 19, on a :

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |T(f_t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R},\lambda)} &= \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{i=1}^n T(f_i) g_i(t) \right|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R},\lambda)} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n T(f_i) g_i \right\|_{L^p(\mathbb{R},H)} \\
&= \|(T \otimes Id_H)(f)\|_{L^p(\mathbb{R},H)} \\
&\leq \|T\| \|f\|_{L^p(\mathbb{R},H)} \\
&= \|T\| \left\| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_t|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R},\lambda)}
\end{aligned}
$$

ce qui prouve l'inégalité dans le cas où $f \in L^p(\mathbb{R}) \otimes H$. □

2.6.3 Théorème de Marcinkiewicz

On peut désormais prouver le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz.

Théorème 21 (Marcinkiewicz)**.** *Soit $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $m \in C^1(]-2^{j+1}, -2^j[\cup]2^j, 2^{j+1}[)$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, notons $I_j =]-2^{j+1}, -2^j] \cup [2^j, 2^{j+1}[$.*
Supposons qu'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \int_{I_j} |m'(\xi)| d\xi \leq A.$$

Alors, pour tout $p \in]1, +\infty[$, $m \in \mathscr{M}_p$ et il existe $C > 0$ tel que :

$$\|m\|_{M_p} \leq C(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^6.$$

Démonstration. Soit $p \in]1, +\infty[$.
• Commençons par montrer que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, m admet des limites à gauche en -2^j et 2^{j+1} et des limites à droite en -2^{j+1} et 2^j.
Soit $j \in \mathbb{Z}$. Montrons seulement que m admet une limite à droite en 2^j, les autres cas se traitant de même. Utilisons le critère de Cauchy. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]2^j, 2^{j+1}[$ vérifiant $\lim_{n \to +\infty} x_n = 2^j$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$|m(x_p) - m(x_q)| \leq \int_{2^j}^{2^{j+1}} \mathbb{1}_{\{\lambda x_p + (1-\lambda) x_q, \lambda \in [0,1]\}}(t) |m'(t)| dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème de convergence dominée, donc m admet une limite à droite en 2^j.
• Posons $m_+ = m \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$, $m_- = m \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$. On a $m = m_+ + m_-$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, posons $I_j^+ = [2^j, 2^{j+1}[$. Soit $j \in \mathbb{Z}$.
Puisque m est intégrable sur tout intervalle $[2^j, \xi]$, où $\xi \in [2^j, 2^{j+1}[$, on a :

$$\forall \xi \in I_j^+, m(\xi) = m(2^j) + \int_{2^j}^{\xi} m'(t) dt.$$

• Soit $j \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}$. Montrons que :

$$m(\xi)\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi) = m(2^j)\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi)m'(t)dt.$$

Si $\xi \notin I_j^+$, le résultat est immédiat. Supposons donc $\xi \in I_j^+$. On a :

$$\begin{aligned} m(\xi)\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi) &= m(2^j)\hat{f}(\xi) + \int_{2^j}^{\xi} \hat{f}(\xi)m'(t)dt \\ &= m(2^j)\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi)m'(t)dt \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

• Montrons alors que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j}m_+\right)^\vee = m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I_j^+}(f)m'(t)dt.$$

Soit $j \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j}m_+\right)^\vee(x) &= \left(\hat{f}m\mathbb{1}_{I_j^+}\right)^\vee(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(m(2^j)\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi)m'(t)dt\right) e^{2i\pi x\xi}d\xi \\ &= m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f)(x) + \int_{\mathbb{R}}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi)m'(t)e^{2i\pi x\xi}dtd\xi. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par Fubini-Tonnelli, on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\hat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(\xi)\mathbb{1}_{I_j^+}(\xi)m'(t)e^{2i\pi x\xi}\right| dtd\xi = \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\int_t^{2^{j+1}} |\hat{f}(\xi)|d\xi\right) |m'(t)|dt < +\infty$$

donc, d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j}m_+\right)^\vee(x) &= m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f)(x) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\mathbb{1}_{[t,+\infty[}\mathbb{1}_{I_j^+}\hat{f}\right)^\vee(x)m'(t)dt \\ &= m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f)(x) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\mathbb{1}_{[t,+\infty[}\widehat{\Delta_{I_j^+}(f)}\right)^\vee(x)m'(t)dt \\ &= m(2^j)\Delta_{I_j^+}(f)(x) + \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left(\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I_j^+}f\right)(x)m'(t)dt \end{aligned}$$

d'où le résultat.

• Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, comme $|m'|^{\frac{1}{2}} \in L^2(]2^j, 2^{j+1}[)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que :

$$\begin{aligned} \left|\left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j}m_+\right)^\vee\right| &\leq \|m\|_\infty|\Delta_{I_j^+}(f)| + \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} |m'(t)|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I_j^+}f\right|^2 |m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|m\|_\infty|\Delta_{I_j^+}(f)| + \sqrt{A}\left(\int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I_j^+}f\right|^2 |m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient alors (en prenant la norme de $\ell^2(\mathbb{Z})$), pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j} m_+\right)^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|m\|_\infty \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\Delta_{I_j^+} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I_j^+} f\right|^2 |m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|m\|_\infty \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\Delta_{I_j^+} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\left(\int_0^{+\infty} \left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}} f\right|^2 |m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} \ (1).$$

Notons que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\Delta_{I_j^+} f = \left(\hat{f}\mathbb{1}_{I_j^+}\right)^\vee = \left(\hat{f}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\mathbb{1}_{I_j}\right)^\vee = \left(\left(\left(\hat{f}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right)^\vee\right)^\wedge \mathbb{1}_{I_j}\right)^\vee = \Delta_{I_j}(f_+)$$

où $f_+ = \Delta_{]0,+\infty[} f$.

• D'après le théorème 19, il existe $C' > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\Delta_{I_j^+} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leq C' \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f_+\|_p$$

$$= \frac{C'}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \|(Id + iH)(f)\|_p$$

$$\leq \frac{C'}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 C'' \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \|f\|_p \quad = \frac{C'C''}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^3 \|f\|_p$$

la dernière inégalité venant du théorème 17.

• Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Essayons de majorer la quantité :

$$\left\|\left(\int_0^{+\infty} \left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}} f\right|^2 |m'(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\left|\Delta_{[t,+\infty[}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}} f\right| = \left|\frac{1}{2}(R_t(Id + iH)R_{-t})\left(\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}} f\right)\right| = \frac{1}{2}\left|(Id + iH)\left(R_{-t}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}} f\right)\right|.$$

Appliquons le corollaire 5. On pose $T = \frac{1}{2}(Id + ih) \in B(L^p(\mathbb{R}))$. La mesure $\mu = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}|m'(t)|dt$ est σ-finie. Posons alors :

$$g : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & L^2(\mathbb{R}, \mu) \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & R_{-t}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}}(f)(x) \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Montrons que g est bien définie et que $g \in L^p(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}, \mu))$.

Pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)(t)|^2 d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \left|R_{-t}\Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t)\rfloor}}(f)(x)\right|^2 |m'(t)|dt$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left|\Delta_{I_j^+}(f)(x)\right|^2 |m'(t)|dt$$

$$\leq A \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\Delta_{I_j^+}(f)(x)\right| < +\infty$$

donc g est bien définie et, comme :

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \Delta_{I_j^+} f \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq \frac{C'C''}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^3 \|f\|_p$$

on a $g \in L^p(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}, \mu))$ avec :

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R},\mu))} \leq \frac{C'C''\sqrt{A}}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^3 \|f\|_p.$$

Comme $\|T\| \leq \frac{C'}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)$, le corollaire 5 assure que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^{+\infty} \left| \Delta_{[t,+\infty[} \Delta_{I^+_{\lfloor \log_2(t) \rfloor}} f \right|^2 |m'(t)| dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &\leq \frac{C''}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \frac{C'C''\sqrt{A}}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^3 \|f\|_p \\ &= \frac{\sqrt{A}C'C''^2}{4} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^4 \|f\|_p. \end{aligned}$$

On déduit alors par (1) que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \left(\hat{f} \mathbb{1}_{I_j} m_+ \right)^\vee \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p &\leq \|m\|_\infty \frac{C'C''}{2} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^3 \|f\|_p + \sqrt{A} \frac{\sqrt{A}C'C''^2}{4} \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^4 \|f\|_p \\ &\leq \tilde{C}(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^4 \|f\|_p \end{aligned}$$

où $\tilde{C} = \frac{C'C''}{2}\left(1 + \frac{C''}{2}\right)$, car $\max\left(p, \frac{1}{p-1}\right) \geq 1$.

• D'après le théorème 19, il existe $C_1 > 0$ tel que pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{f} m_+ \right)^\vee \right\|_p &\leq C_1 \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^2 \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \left(\hat{f} \mathbb{1}_{I_j} m_+ \right)^\vee \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\leq C_1 \tilde{C}(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^6 \|f\|_p \\ &= C_2(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^6 \|f\|_p. \end{aligned}$$

si $C_2 = C_1\tilde{C}$.

De même, il existe $C_3 > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\left\| \left(\hat{f} m_- \right)^\vee \right\|_p \leq C_3(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^6 \|f\|_p.$$

On pose alors $C = C_2 + C_3$ et on en déduit que, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|T_m f\|_p = \left\| \left(\hat{f} m_+ \right)^\vee + \left(\hat{f} m_- \right)^\vee \right\|_p \leq C(A + \|m\|_\infty) \max\left(p, \frac{1}{p-1}\right)^6 \|f\|_p.$$

ce qui conclut. □

Références

[1] D.Li and H. Queffelec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach, Analyse et probabilités*. Société Mathématique de France, 2004.

[2] R.E. Edwards and G.I Gaudry. *Littlewood-Paley and Multiplier Theory*. Springer, 1977.

[3] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis, third edition*. Springer, 2014.

[4] W. Rudin, Mc G. Hill, and J. Dhombres. *Analyse réelle et complexe, Toisième édition*. Dunod, 2009.